Mer om rotasjoner og speilinger

* Rotasjonsmatrisen

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

representerer rotasjonen om origo med rotasjonsvinkel θ mot urviseren.

* Speilingsmatrisen

$$S_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

representerer speilingen av planet i linjen gjennom origo og punktet $(\cos\frac{\theta}{2}, \sin\frac{\theta}{2})$.

For å vise det siste vil vi uttrykke S_θ ved hjelp av en Householder-matrise Q_v, $v \neq 0$. Vi har tidligere sett at $-Q_v$ representerer speilingen i linja gjennom 0 og v.

<u>Prop:</u> $S_\theta = -Q_v$ når $v = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$.

Beni La $\gamma = \frac{\theta}{2}$. Sidem $\|v\| = 1$. es

$$-Q_v = \frac{2}{\|v\|^2} vv^T - \overline{I}$$

$$= \begin{pmatrix} 2\cos^2\gamma - 1 & 2\cos\gamma \cdot \sin\gamma \\ 2\cos\gamma \cdot \sin\gamma & 2\sin^2\gamma - 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos 2\gamma & \sin 2\gamma \\ \sin 2\gamma & -\cos 2\gamma \end{pmatrix}$$

$$= S_\theta \quad //$$

Prop: (i) $R_\theta \cdot R_\eta = R_{\theta+\eta}$

(ii) $R_\theta \cdot S_\eta = S_{\theta+\eta}$

(iii) $S_\eta \cdot R_\theta = S_{\eta-\theta}$

(iv) $S_\theta \cdot S_\eta = R_{\theta-\eta}$

Bevis: (i) Addisjonsformlene for cosinus og sinus gir

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\eta & -\sin\eta \\ \sin\eta & \cos\eta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix}.$$

For å bevise det andre utsagnet, la

$$\bar{\tau} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$R_\theta \bar{\tau} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$= S_\theta$$

$$\bar{\tau} R_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ -\sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$= S_{-\theta}.$$

(ii) $R_\theta S_\eta = R_\theta R_\eta \bar{\imath} = R_{\theta+\eta} \bar{\imath} = S_{\theta+\eta}$

(iii) $S_\eta R_\theta = \bar{\imath} R_{-\eta} R_\theta = \bar{\imath} R_{\theta-\eta} = S_{\eta-\theta}.$

(iv) $S_\theta S_\eta = R_\theta \bar{\imath} \cdot \bar{\imath} R_{-\eta}$

$$= R_\theta R_{-\eta} = R_{\theta-\eta}. \; //$$

Prop: (i) En rotationsmatris $R_\theta \neq \pm I$ har inga reella egenvärden.

(ii) En spegling matris S_θ har egenvärden ± 1.

Bevis: Vi räknar ut de karaktäristiska polynomen.

(i) $\chi_{R_\theta}(\lambda) = \lambda^2 - 2\cos\theta \cdot \lambda + 1$

$= (\lambda - \cos\theta)^2 - \cos^2\theta + 1$

$= (\lambda - \cos\theta)^2 + \sin^2\theta.$

Hvis $\sin\theta \neq 0$ har R_θ derfor ingen reelle egenverdier, og

$$\sin\theta = 0 \iff \cos\theta = \pm 1$$
$$\iff R_\theta = \pm 1.$$

(ii) $\chi_{S_\theta}(\lambda) = \lambda^2 - 1 = (\lambda+1)(\lambda-1)$.

//

Def: Rotasjon om et punkt $p \in \mathbb{R}^2$ med vinkel θ er avbildningen $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gitt ved

$$T(x) = R_\theta(x - p) + p$$

$$= R_\theta \cdot x + (I - R_\theta) \cdot p$$

Eks: La $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vær rotasjon med vinkel $\theta = \frac{\pi}{2}$ om punktet $p = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Vi ønsker å uttrykke R på formen

$$T(x) = Ax + b.$$

Vi har

$$R_{\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$I - R_{\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(I - R_{\frac{\pi}{2}}\right) \cdot p = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow T(x) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -x_2 + 3 \\ x_1 + 1 \end{pmatrix}.$$

Def: La L være en linje i planet, $p \in L$, og $v \neq 0$ en normalvektor til L. Speilingen i L er avbildningen $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gitt ved

$$T(x) = Q_v(x - p) + p,$$

hvor $Q_v = I - \frac{2}{\|v\|^2} vv^T$ er Householder-matrisen til v.

Eks $L = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 2x - y = 1 \right\}$.

Vi kan velge $p = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$$vv^T = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \|v\|^2 = 5.$$

$$\frac{2}{\|v\|^2} vv^T = \frac{2}{5}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

$$Q_v = I - \frac{2}{\|v\|^2} vv^T = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

$$(I - Q_v) \cdot p = \begin{pmatrix} \frac{8}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ -\frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow T(x) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ -\frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3x_1 + 4x_2 + 4 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2 \end{pmatrix}.$$