Prop For $u, v \in \mathbb{R}^3$ gjelder:

$u \times v = 0 \iff u, v$ lineært avhengig.

Bevis (i) Anta $u, v$ lineært uavhengige. Da finnes $w \in \mathbb{R}^3$ slik at $[u, v, w)$ er en basis for $\mathbb{R}^3$

$\Rightarrow (u \times v) \cdot w = [u, v, w) \neq 0$

$\Rightarrow u \times v \neq 0$.

(ii) Anta $u, v$ lineært avhengige. Da finnes reelle tall $a, b$, ikke

Vegge like 0, slik at

$$au + bv = 0.$$

Hvis $a \neq 0$, er $u = -\frac{b}{a} \cdot v$ og

$$u \times v = -\frac{b}{a}(v \times v) = 0.$$

Hvis $b \neq 0$, finner vi igjen at $u \times v = 0$. //

Def: En basis $(u, v, w)$ for $\mathbb{R}^3$ kalles

* positiv dersom $[u, v, w] > 0$
* negativ " $[u, v, w] < 0$.

Eks: Standardbasisen $\{i, j, k\}$ er positiv.

# 5.2 Ortogonale 3×3 matriser

**Husk:** En $n \times n$ matrise $A$ kalles ortogonal dersom

$$A^T \cdot A = I.$$

For enhver ortogonal matrise $A$ gjelder:

(i) $\det(A) = \pm 1$.

(ii) Hvis $\lambda$ er en reell egenverdi for $A$, så er $\lambda = \pm 1$.

Def:

$O(n) :=$ mängden av alla ortogonala $n \times n$ matriser

$SO(n) := \{A \in O(n) \mid \det(A) = 1\}$.

Prop: Låt $A$ vara en ortogonal $3 \times 3$ matris.

(i) Om $\det(A) = 1$, så är 1 ett egenvärde för $A$.

(ii) Om $\det(A) = -1$, så är $-1$ ett egenvärde för $A$.

Bevis: (i) Vist tidligere.

(ii) $\det(-A) = (-1)^3 \det(A) = -1$

$\Rightarrow$ $-A$ har en egenvektor $v$

slik at $(-A)v = v$

dvs. $Av = -v$

$\Rightarrow$ $-1$ er en egenverdi for $A$.

//

Def: La $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$.

Det ortogonale komplementet

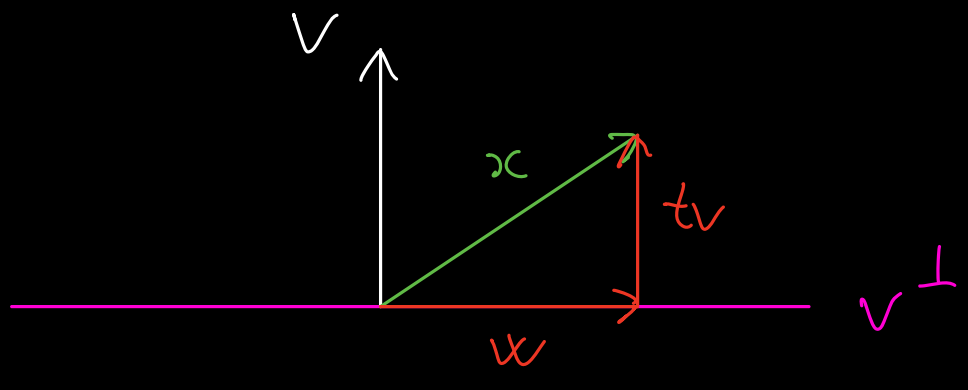
til $v$ er delrommet ved

$$v^\perp = \{ w \in \mathbb{R}^n \mid v \cdot w = 0 \}.$$

**Prop:** La $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$.
Da kan enhver vektor $x \in \mathbb{R}^n$ skrivas entydig som

$$x = tv + w,$$

hvor $t \in \mathbb{R}$ og $v \cdot w = 0$.



Bevis: Entydighet:

Anta $x = tv + w$. Da er

$$v \cdot x = tv \cdot v + v \cdot w = t\|v\|^2$$

$$\Rightarrow t = \frac{x \cdot v}{\|v\|^2}, \quad w = x - tv. \quad (*)$$

Eksistens Definer $t, w$ som i (*).

Da er

$$v \cdot w = v \cdot x - t\|v\|^2 = 0. \quad //$$

Prop: La $A$ være en ortogonal $n \times n$ matrise og $v$ en egenvektor for $A$. Da er

$$A \cdot v^{\perp} = v^{\perp}$$

Bevis: La $Av = \lambda v$, $\lambda = \pm 1$.

Hvis $w \in v^{\perp}$, er

$$0 = v \cdot w = Av \cdot Aw = \pm v \cdot Aw$$

$$\Rightarrow Aw \in v^{\perp}.$$

Dette viser at $Av^{\perp} \subset v^{\perp}$. Siden $A$ er invertibel, har $Av^{\perp}$ den samme dimensjon som $v^{\perp}$, så $Av^{\perp} = v^{\perp}$.

//.

Prop: La $w \in \mathbb{R}^3$, $\|w\| = 1$.

Da finns vektorer $u, v \in \mathbb{R}^3$

slik at $\{u, v, w\}$ er en positiv ortonormert basis for $\mathbb{R}^3$.

<u>Bevis</u>: Velg $v \in w^{\perp}$, $\|v\| = 1$.

Sett $u = v \times w$. Da er

$$\|u\| = \|v\| \cdot \|w\| = 1.$$

$$[u, v, w] = u \cdot (v \times w) = \|u\|^2 = 1.$$

//

# 5.3 Isometrier i $\mathbb{R}^3$

**Def:** En isometri $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ som bevarar origo, kallas en punktsymmetri (av $\mathbb{R}^3$).

**Merk:** En punktsymmetri har formen

$$m(x) = Ax,$$

hvor $A \in O(3)$.

Vi skal se at det finns 3 typer ikke-trivielle punktsymmetries:

(i) Rotasjon om en linje gjennom 0

(ii) Speiling i et plan gjennom 0

(iii) Rotasjonsspeiling

Def: En punktsymmetri med matrix

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

kalder en rotation om z-aksen med rotationsvinkel $\theta \in \mathbb{R}$.

Mærk: $\theta$ og $2\pi k$ giver samme rotation for $k \in \mathbb{Z}$.
Vi siger at $\theta$ er bestemt modulo $2\pi$.

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta \cdot x - \sin\theta \cdot y \\ \sin\theta \cdot x + \cos\theta \cdot y \\ z \end{pmatrix}$$

Def: Med en orientering av en linje $L$ i $\mathbb{R}^n$ menes ni en enhetsvektor parallell med $L$.

("v enhetsvektor" betyr $\|v\| = 1$)

Merk Enhver linje har nøyaktig to orienteringer.

Eks: $k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ er standard

orientering av $z$-aksen.

**Def:** For $0 \neq v \in \mathbb{R}^3$ skriver vi

$$\mathbb{R}v = \{tv \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

$= $ linjen gjennom $0$ og $v$.

Vi lar $\mathbb{R}v$ ha orienteringen

$$\frac{v}{\|v\|}.$$