Def: La $T: V \to W$ være en lineær avbildning og

$\{v_1, \dots, v_r\}$ en basis for V,

$\{w_1, \dots, w_s\}$ — " — W.

Matrisen $A = (a_{ij})$ for T relativt til disse basisene er definert ved

$$T(v_j) = \sum_{i=1}^{s} a_{ij} w_i .$$

Eks:

$$V = W = \{ a\cos x + b\sin x \mid a, b \in \mathbb{R} \}$$

$v_1 := \cos x, \quad v_2 = \sin x$

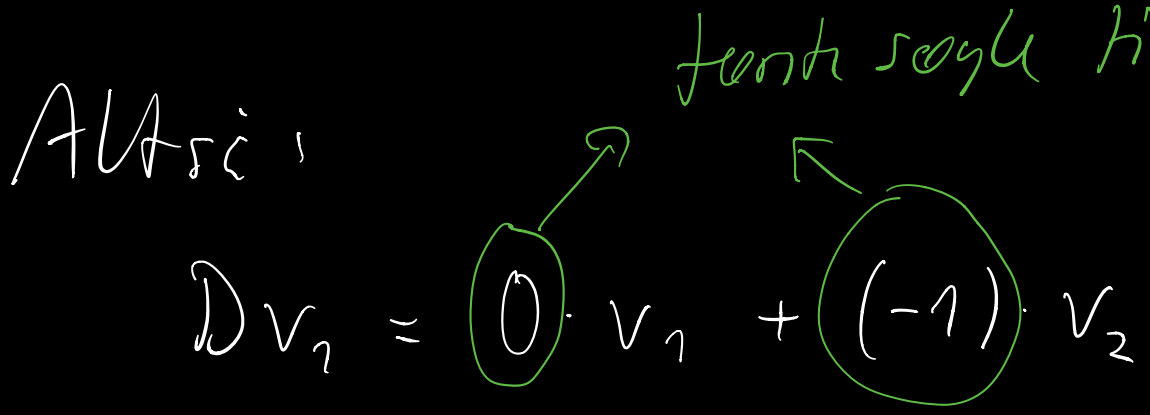
$\{v_1, v_2\}$ er en basis for V.

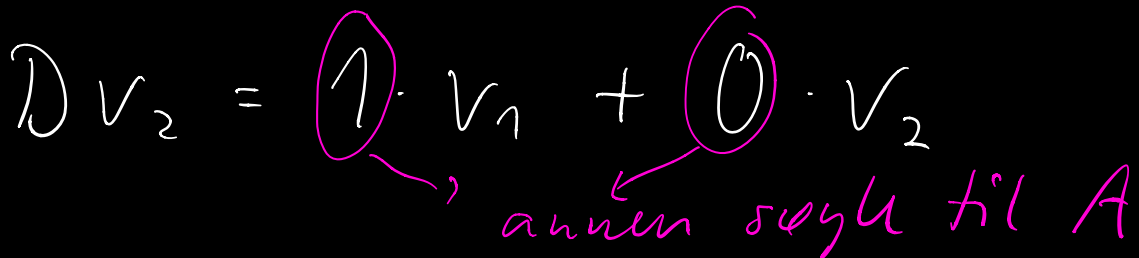
$D : V \to V$: derivasjonsoperatoren.

$$D \cos x = \frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$$

$$D \sin x = \cos x$$

Altså:





$\Rightarrow$ Matrisen A til D relativt til basisen $\{v_1, v_2\}$ er

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Eks: $V = W = P_2$

$= \{$ polynomer $ax^2 + bx + c\}$

$D : V \to V$: derivasjon.

Basis for V: $\{1, x, x^2\}$

$v_1 = 1, \quad v_2 = x, \quad v_3 = x^2$

$$D(v_1) = \frac{d}{dx} 1 = 0$$

$$= 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3$$

Elementene i første søyle til A.

$$D(v_2) = \frac{d}{dx} x = 1 = v_1$$

$$= 1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3$$

$$D(v_3) = \frac{d}{dx} x^2 = 2x = 2v_2$$

$$= 0 \cdot v_1 + 2 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3$$

Matrix of $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Mer om lineära avbildningar

Def För en linjär avbildning $T: V \to W$ mellan två vektorrum definierar vi

* Kärnan (= nollrummet)
$$N(T) := \{ v \in V \mid T(v) = 0 \}$$

* Bildrummet
$$R(T) := \{ T(v) \mid v \in V \}.$$

Prop: (i) $N(T)$ är ett underrum av V.

(ii) $R(T)$ är ett underrum av W.

Bevis: (i) Hvis $T(v_1) = 0 = T(v_2)$

og $a, b \in \mathbb{R}$, så er

$$T(av_1 + bv_2) = aT(v_1) + bT(v_2)$$

$$= 0.$$

(ii) Likeledes. //

Observasjon Hvis $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

er gitt ved en $m \times n$ matrise A,

er

$R(T)$ = søylerommet til A

fordi hvis $x = (x_1, \dots, x_n)$, er

$$Ax = x_1 A_1 + x_2 A_2 + \cdots + x_n A_n.$$

Eks: La $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ være gitt ved matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Har sett tidligere at $\underset{\dim R(T)}{\underset{\parallel}{rg(A)}} = 2$.

Vil bestemme $N(T)$, dvs. vi søker alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ slik at

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0,$$

altså

$$\begin{aligned} 2x - y + z &= 0 \\ x + z &= 0 \\ 3x + y + 4z &= 0 \end{aligned}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x + z = 0 & I \\ 2x - y + z = 0 & II \\ 3x + y + 4z = 0 & III \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x + z = 0 & I \\ -y - z = 0 & II - 2I \\ y + z = 0 & III - 3I \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z \\ -z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dette viser at

$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ er en basis for $N(T)$.

Merk

$$\dim \mathbb{R}^3 = 3 = 1 + 2$$
$$= \dim N(T) + \dim R(T).$$

Teorem Hvis $T: V \to W$ er lineær og V har endelig dimensjon, så er

$$\dim V = \dim N(T) + \dim R(T)$$

Bevis: $n := \dim(V)$.

$q := \dim N(T) \leq n$

$p := n - q$.

Velg en basis $(v_{p+1}, \dots, v_{p+q})$ for $N(T)$. Vi kan finne $v_1, \dots, v_p \in V$ slik at

$$\{v_1, \dots, v_p, v_{p+1}, \dots, v_{p+q}\}$$

er en basis for V. La

$$w_i := T(v_i), \quad i = 1, \dots, p.$$

Vi vil vise at $(w_1, \dots, w_p)$ er en basis for W, slik at

$$\dim V = n = p+q = \dim R(T) + \dim N(T).$$

(i) $\{w_1, \dots, w_p\}$ subespacio $R(T)$.

La $v \in V$. Da er

$$v = \sum_{i=1}^{p+q} a_i v_i \quad , \quad a_i \in \mathbb{R}.$$

$$T(v) = \sum_{i=1}^{p+q} a_i T(v_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{p} a_i T(v_i) + \sum_{i=p+1}^{p+q} a_i \underbrace{T(v_i)}_{0}$$

$$= \sum_{i=1}^{p} a_i w_i$$

(ii) $(w_1, \dots, w_p)$ er lin. uavhengig.

Anta $\sum_{i=1}^{r} a_i w_i = 0$, $a_i \in \mathbb{R}$.

Da er

$$T\Big(\underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_i v_i}_{x}\Big) = \sum_{i=1}^{r} a_i w_i = 0$$

Altså er $x \in N(T)$, så

$$x = \sum_{i=p+1}^{n+q} a_i v_i, \quad a_i \in \mathbb{R}.$$

$\Rightarrow$

$$0 = a_1 v_1 + \dots + a_p v_p - a_{p+1} v_{p+1} - \dots - a_{p+q} v_{p+q}$$

Sidan $\{v_1, \dots, v_{n+1}\}$ är en bas för V, så $a_i = 0$ för alla i.

//.

Def: Låt $T : V \to V$ vara en linjär avbildning. En vektor $v \in V$ skild från 0 kallas en egenvektor därom det finns ett reellt tal λ sådant att

$$T(v) = \lambda v.$$

I så fall kallas λ ett egenvärde

Eles:

$C^\infty(\mathbb{R}) := \{$ alle uendelig mange ganger deriverbare funksjoner $\mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$

$D : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$,

$(Df)(x) = f'(x)$

La $f(x) = e^{\lambda x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

$f'(x) = \lambda e^{\lambda x} = \lambda f(x)$

D.v.s. $Df = \lambda f$

$\Rightarrow$ $e^{\lambda x}$ er en egenvektor for D med egenverdi λ.

<u>Teorem</u> La $T: V \to V$ være en lineær avbildning, og la $v_1, \dots, v_s$ være egenvektorer for T med egenverdier $\lambda_1, \dots, \lambda_r$, dvs. $T(v_i) = \lambda_i v_i$.

Hvis $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ er parvis forskjellige (altså $\lambda_i \neq \lambda_j$ for alle $i \neq j$), så er $\{v_1, \dots, v_s\}$ lineært uavhengig.

Bevis: Vi viser at $(v_1, \dots, v_k)$ er lineært uavhengig for $k = 1, \dots, 5$ ved induksjon på k.

$k = 1$: (v_1) lin. uavh. fordi $v_1 \neq 0$.

$1 < k \leq 5$: Anta $(v_1, \dots, v_{k-1})$ er lin. uavhengig, og

$$a_1 v_1 + \dots + a_k v_k = 0.$$

Da er

$$0 = T\left(\sum_{i=1}^{k} a_i v_i\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{k} a_i T(v_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{k} a_i \lambda_i v_i .$$

$$\Rightarrow 0 = \sum_{i=1}^{k} a_i \lambda_i v_i - \lambda_k \sum_{i=1}^{k} a_i v_i$$

$$= \sum_{i=1}^{k-1} a_i \underbrace{(\lambda_i - \lambda_k)}_{\neq 0} v_i$$

$$\Rightarrow a_i = 0 \quad \text{for} \quad i = 1, \dots, k-1 .$$

$$\Rightarrow 0 = \sum_{i=1}^{k} a_i v_i = a_k \underbrace{v_k}_{\neq 0}$$

$$\Rightarrow a_k = 0$$

Damit sind $(v_1, \dots, v_k)$ es linear unabh. //

Korollar Hvis $T: V \to V$ er lineær og $\dim V = n$, så har T høyst n forskjellige egenverdier.

Def: En basis $(v_1, \cdots, v_n)$ for $\mathbb{R}^n$ kalles ortonormert dersom

$$\|v_i\| = 1, \quad i = 1, \cdots, n$$

$$v_i \cdot v_j = 0 \quad \text{for } i \neq j.$$