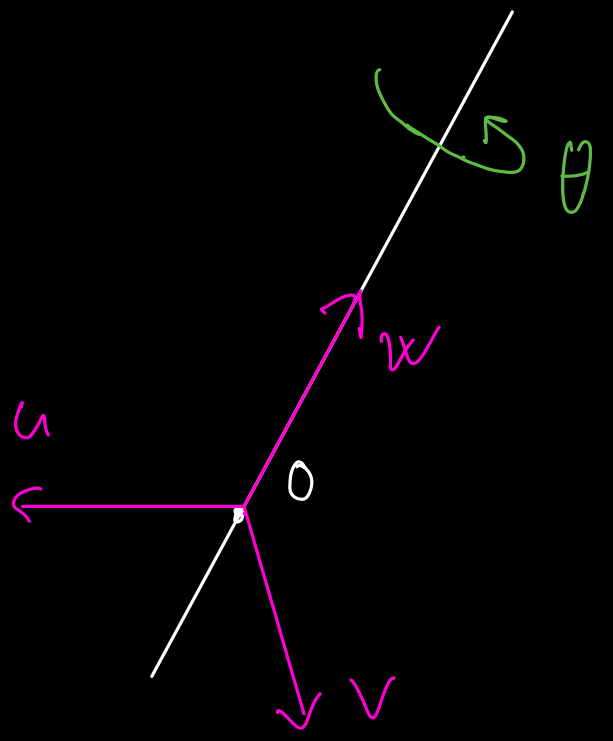
Rotasjon om en linje



Def: La $w \in \mathbb{R}^3$, $\|w\| = 1$, og $\theta \in \mathbb{R}$. Rotasjonen om linjen $\mathbb{R}w$ med rotasjonsvinkel θ er den lineære avbildningen

$$R_{w,t} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

definiert som følger: Velg vektorer u, v slik at

$$\mathcal{B} = \{u, v, w\}$$

er en positiv ortonormert basis for $\mathbb{R}^3$. Da er matrisen til $R_{w,t}$ relativt til $\mathcal{B}$ gitt ved

$$\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Eksplisitt: La $R = R_{w,\theta}$.

$$Ru = \cos\theta \cdot u + \sin\theta \cdot v$$
$$Rv = -\sin\theta \cdot u + \cos\theta \cdot v$$
$$Rw = w.$$

Merk (i) $R_{w,\theta}$ avhenger ikke av valget av u, v.

(ii) Vinkelen $\theta + 2\pi k$ gir den samme rotasjonen som θ for $k \in \mathbb{Z}$.

(iii) $R_{-w,-\theta} = R_{w,\theta}$.

Prop: La (u, v, w) vere en positiv ortonormal basis for $\mathbb{R}^3$, og $\theta \in \mathbb{R}$.
Matrisen til rotasjonen $R_{w,\theta}$ relativt til standardbasisen (i, j, k) er da

$$CBC^{-1},$$

hvor

$$B = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

C = matrisen med søyler

u, v, w.

<u>Bevis</u> $Ci = u$

$Cj = v$

$Ck = w$

$$C \square C^{-1} u = C \square i$$

$$= C\left(\cos\theta \cdot i + \sin\theta \cdot j\right)$$

$$= \cos\theta \cdot u + \sin\theta \cdot v$$

$$C \square C^{-1} v = C \square j$$

$$= -\sin\theta \cdot u + \cos\theta \cdot v$$

$$C \square C^{-1} w = C \square k = Ck = w. \quad //$$

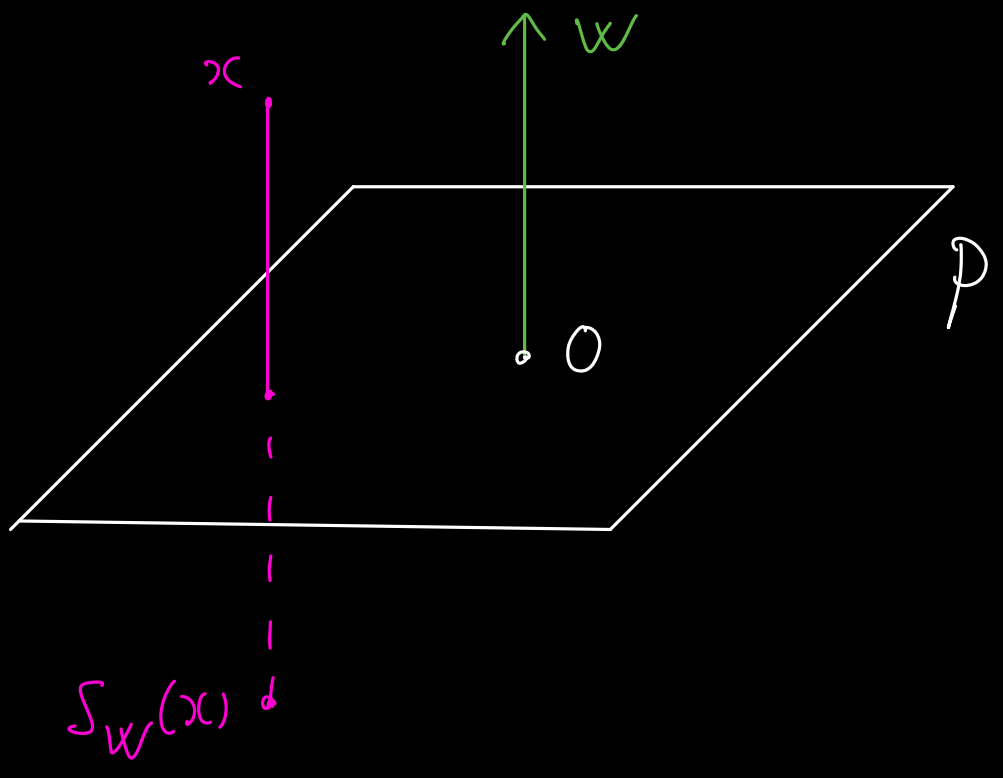
Korollar Hvis A er matrisen til en rotasjon, så er

$$\det(A) = 1.$$

Bevis: $A = CBC^{-1}$ som ovenfor,

$$\begin{aligned}\det(A) &= \det(C) \cdot \det(B) \cdot \det(C^{-1}) \\ &= \det(B) \cdot \det(CC^{-1}) \\ &= \det(B) \\ &= \cos^2\theta + \sin^2\theta \\ &= 1. \quad //\end{aligned}$$

Speiling i et plan



Def La P vær et plan gjennom 0, og $w \neq 0$ en normalvektor til P, dvs.

$$P = w^{\perp}.$$

Med speilingen i P mener vi den lineære avbildningen

$$S_w : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

slik at

$$S_w(w) = -w,$$
$$S_w(x) = x \text{ for } x \in P.$$

Merk (i) Matrisen til S_w (med hensyn på standardbasis) er Householdermatrisen

$$Q_w = I - \frac{2}{\|w\|^2} w w^T.$$

(ii) $\det(S_w) = -1$

Bevis: Som for $R_{w,\theta}$.

<u>Eks</u> La $w = j = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

S_j = speilingen i xz-planet

Matrise: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Rotasjonsspeilinger

La igjen P være normalplanet til $w \neq 0$, og $\theta \in \mathbb{R}$. Med rotasjonsspeilingen om linja $\mathbb{R}w$ med vinkel θ mener vi den lineære avbildningen

$$S_{w,\theta} := S_w \circ R_{w,\theta}$$

= rotasjon om $\mathbb{R}w$ med vinkel θ etterfulgt av speiling i P.

Merk: Hvis A er matrisen til $S_{w,\theta}$:

$$\det(A) = -1.$$

Eks: La $w = j = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$R_{j,\frac{\pi}{2}}$ er rotasjon om y-aksen med vinkel $\frac{\pi}{2}$.

Matrise:

$$\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{2} & 0 & -\sin\frac{\pi}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\frac{\pi}{2} & 0 & \cos\frac{\pi}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

P = normalplanet til j

= xz-planet.

S_j = speiling i xz-planet

Matrise: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ Rotasjonsspeilingen $S_{j,\frac{\pi}{2}}$ har matrise

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Eks $w = k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\theta = \pi$.

$R_{k,\pi}$ = rotasjon om z-aksen med vinkel π

Matrise: $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

S_{xy} = speiling i xy-planet

Matrisa: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ Rotasjonsspeilingen $S_{k,\bar{\imath}}$ har matrise

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow S_{k,\bar{\imath}}(x) = -x$ for alle x

Definisjon: Avbildningen $m(x) = -x$ kalles **inversjonen** i origo.

Merk: Enhver rotasjonsspeiling med vinkel π er lik inversjonen i origo.

Klassifikasjon av punktsymmetrier

Teorem La $m : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ være en ikke-triviell punktsymmetri med fikspunktmengde

$$\mathcal{F}_m = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid m(x) = x\}.$$

(i) Hvis $\mathcal{F}_m$ er en linje L, så er m en rotasjon om L.

(ii) Hvis $\mathcal{F}_m$ er et plan P, så er m speilingen i P.

(iii) Hvis $\mathcal{F}_m = \{0\}$, så er m en rotasjonssymmetri.