MAT1060

Dynamiske systemer

* kontinuerlige

(systemet utvikler seg over et visst tidsrom)

* diskrete

(systemet utvikler seg skrittvis)

1.1 Diskrete dynamiske systemer

Eksempel: Vi studerer en populasjon delt inn i 4 kategorier:

Nyfødte, unge, voksne, gamle.

Overlevelsesrate per år:

0,9 for nyfødte,

0,8 " unge,

0,5 for voksne,

0,3 " gamle.

Reproduksjonsrate per år

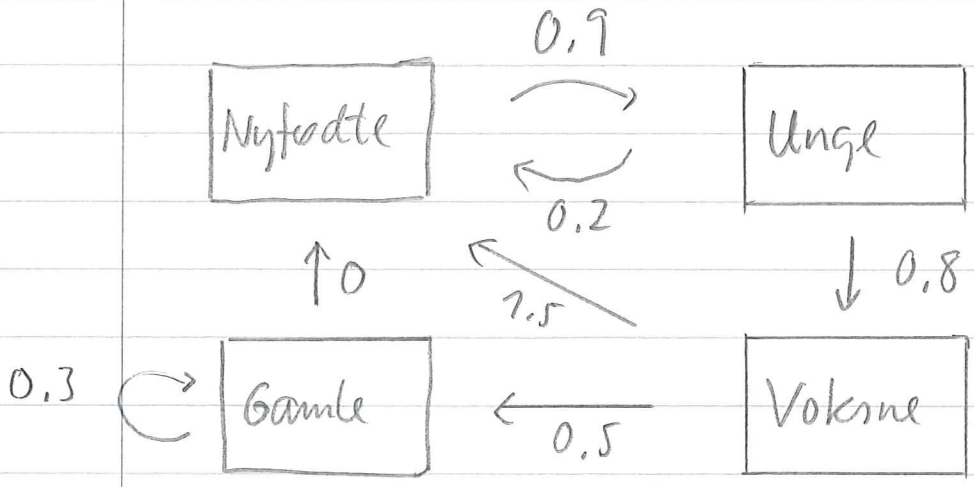
0 for nyfødte,

0,2 " unge,

1,5 " voksne,

0 " gamle.

Boksdiagram



Notasjon:

w_n := # nyfødte ved år n

x_n := # unge — " —

y_n := # voksne — " —

z_n := # gamle — " —

Dynamikken i systemet kan beskrives ved likningene

$$w_{n+1} = 0{,}2 \cdot x_n + 1{,}5 \cdot y_n$$

(*) $$x_{n+1} = 0{,}9 \cdot w_n$$

$$y_{n+1} = 0{,}8 \cdot x_n$$

$$z_{n+1} = 0{,}5 \cdot y_n + 0{,}3 \cdot z_n$$

Vi velger startverdiene

$w_0 = 100$, $x_0 = 70$, $y_0 = 50$, $z_0 = 20$.

Vi finner

$w_1 = 89$, $x_1 = 90$, $y_1 = 56$, $z_1 = 31$.

Overgangsmatrisen til systemet er

$$\begin{pmatrix} 0 & 0,2 & 1.5 & 0 \\ 0.9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0,3 \end{pmatrix}$$

Definisjon En $m \times n$ matrise er en tabell av reelle (eller komplekse) tall med m rader og n søyler:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Notasjon: $A = (a_{ij})$

(Radvektor = matrise med kun én rad:

$$(v_1, v_2, \cdots, v_n)$$

Søylevektor = matrise med kun én søyle:

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}$$

Def: Hvis $A = (a_{ij})$ er en $m \times n$ matrise

og $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$

definerer vi produktet

$$A \cdot \vec{v} := \begin{pmatrix} a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + \cdots + a_{1n}v_n \\ a_{21}v_1 + a_{22}v_2 + \cdots + a_{2n}v_n \\ \vdots \\ a_{m1}v_1 + a_{m2}v_2 + \cdots + a_{mn}v_n \end{pmatrix}$$

Altså:

$$(A \cdot \vec{v})_i = \left(i\text{-te rad av } A\right) \cdot \vec{v}$$

: skalarprodukt

Def. av skalarproduktet:

$$(v_1, v_2, \cdots, v_n) \cdot (w_1, \cdots, w_n)$$

$$:= v_1 w_1 + v_2 w_2 + \cdots + v_n w_n$$

$$= \sum_{i=1}^{n} v_i w_i$$

Tilbake til eksempelet ovenfor:

La

$$\vec{v}_n := \begin{pmatrix} w_n \\ x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$$

Da er likningssystemet (*1) ovenfor

ekvivalent med

$$\vec{v}_{n+1} = A \cdot \vec{v}_n,$$

hvor A = overgangsmatrisen

Vi finner

$$\vec{v}_1 = A \cdot \vec{v}_0,$$

$$\vec{v}_2 = A \cdot \vec{v}_1 = A \cdot (A \cdot \vec{v}_0) = \underbrace{(A \cdot A)}_{\text{matriseprodukt}} \cdot \vec{v}_0$$

Def. av matriseproduktet:

Hvis

$A = (a_{ij})$ er en $m \times n$ matrise

$B = (b_{jk})$ " $n \times p$ "

definerer vi $m \times p$ matrisen $A \cdot B$ ved

$$(A \cdot B)_{ik} := \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$$

$$= (i\text{-te rad av } A) \cdot (k\text{-te søyle av } B)$$

: skalarprodukt

Eksempel:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-c & b-d \\ 2a+3c & 2b+3d \end{pmatrix}$$

Def: Hvis A er en $n \times n$ matrise og $\vec{v} \neq 0$ en vektor slik at

$$A \cdot \vec{v} = \lambda \vec{v}$$

for et reelt (eller komplekst) tall λ, så kalles $\vec{v}$ en <u>egenvektor</u> og λ den tilhørende <u>egenverdien</u>.

Egenrommet til λ

:= mengden av alle vektorer $\vec{v}$ (inkl. 0) slik at $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$.

<u>Eksempel</u>: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ er en egenvektor med egenverdi 1

$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ —— " —— " —— -1

Def: Hvis $A\vec{v} = \vec{v}$ og $\vec{v} \neq 0$, så kalles $\vec{v}$ en <u>likevektstilstand</u> for det dynamiske systemet med overgangsmatrise A.

<u>Anvendelse</u> Anta $\vec{u}_0, \vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_r$ er egenvektorer for A med $A\vec{u}_i = \lambda_i \vec{u}_i$, hvor $|\lambda_0| > |\lambda_i|$ for $i > 0$. La

$$\vec{v}_0 = \vec{u}_0 + \vec{u}_1 + \cdots + \vec{u}_r = \sum_{i=0}^{r} \vec{u}_i .$$

Da er

$$\vec{v}_1 = A\vec{v}_0 = \sum_{i=0}^{r} A\vec{u}_i = \sum_{i=0}^{r} \lambda_i \vec{u}_i$$

$$\vdots$$

$$\vec{v}_n = \sum_{i=0}^{r} \lambda_i^n \vec{u}_i$$

$$\lambda_0^{-n}\vec{v}_n = \vec{u}_0 + \sum_{i=1}^{r}\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_0}\right)^n \vec{u}_i$$

$$\to \vec{u}_0 \quad \text{når} \quad n \to \infty.$$

Tilbake til det første eksempelet:

Overgangsmatrisen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}2 & 1{,}5 & 0 \\ 0{,}9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5 & 0{,}3 \end{pmatrix}$$

har to egenverdier

$$\lambda_0 = 1{,}0844$$

$$\lambda_1 = 0{,}3$$

samt to komplekse egenverdier λ_2, λ_3.

Vi har $\lambda_0 > |\lambda_i|$ for $i > 0$.

Argumentet ovenfor gir

$$\lambda_0^{-n} \vec{v}_n \to \vec{u}_0 \neq 0 \quad \text{når } n \to \infty,$$

hvor $A\vec{u}_0 = \lambda_0 \vec{u}_0$. Dette betyr:

* Den årlige populasjonsvektoren stabiliserer seg på 8,44 %.
* Fordelingen mellom aldersgruppene stabiliserer seg.