Mer om matrise-vektor-produkt

Eks:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \quad : \text{andre søyle}$$

Generelt: Hvis $A = (a_{ij})$ er en $m \times n$ matrise

og

$$\vec{e}_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{1-tall på j-te plass}$$

så er

$$A\vec{e}_j = \text{j-te søyle til } A.$$

La

$$A_j = \text{j-te søyle til } A.$$

Hvis

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n} v_j \vec{e}_j,$$

er

$$A\vec{v} = \sum_{j=1}^{n} v_j A\vec{e}_j = \sum_{j=1}^{n} v_j A_j.$$

= vektet sum av søylene til A.

Def Komponentsummen til en vektor

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

er

$$\sigma(\vec{v}) := v_1 + v_2 + \cdots + v_n = \sum_{i=1}^{n} v_i .$$

Def: Hvis A er en $m \times n$ matrise:

j-te søylesum til A

= komponentsummen til den j-te søyle

$$= \sum_{i=1}^{m} a_{ij}$$

i-te radsum til A

= komponentsummen til den i-te rad

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$$

Def En kvadratisk matrise $A = (a_{ij})$ kalles stokastisk dersom

* $a_{ij} \geq 0$ for alle i, j, og
* alle søylesummene til A er like 1.

Eks. En stokastisk 2×2 matrise er på formen

$$\begin{pmatrix} a & 1-b \\ 1-a & b \end{pmatrix}$$

hvor $0 \leq a \leq 1$, $0 \leq b \leq 1$.

Eks. Et firma leier ut 100 biler fra 3 utleiestasjoner. S_1, S_2, S_3. Alle bilene må returneres samme dag. La a_{ij} være sannsynligheten for at en bil som befinner seg på stasjon S_j én morgen, befinner seg på stasjon S_i neste morgen.

Da er $A = (a_{ij})$ en stokastisk matrise.

La

$$\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 30 \\ 50 \\ 20 \end{pmatrix}$$

være fordelingen av biler på de tre stasjonene om morgenen ved dag 0.

Da er

$$\vec{v}_n = A^n \cdot \vec{v}_0$$

den forventede fordelingen av biler etter n dager. Anta nå

$$A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,8 & 0,1 \\ 0,5 & 0,1 & 0,2 \\ 0,2 & 0,1 & 0,7 \end{pmatrix}.$$

V.h.a. computer finner vi

$$A^{10} \simeq \begin{pmatrix} 0,37 & 0,37 & 0,37 \\ 0,28 & 0,28 & 0,28 \\ 0,34 & 0,34 & 0,34 \end{pmatrix}$$

$$\simeq A^{100}.$$

Vi ser at

$$\lim_{n\to\infty} A^n = \begin{pmatrix} u_1 & u_1 & u_1 \\ u_2 & u_2 & u_2 \\ u_3 & u_3 & u_3 \end{pmatrix}$$

hvor $\vec{u} \equiv \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0{,}37 \\ 0{,}28 \\ 0{,}34 \end{pmatrix}$

Da er $A\vec{u} = \vec{u}$, dvs. $\vec{u}$ er en likevektstilstand.

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} A^n \vec{V}_0 = 100 \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} 37 \\ 28 \\ 34 \end{pmatrix}.$$

Altså: Den forventede fordelingen av biler på de tre stasjonene etter n dager stabiliserer seg på (37, 28, 34)

når $n \to \infty$.

↳ komponentsum = 99 pga avrundingsfeil.

Def Et dynamisk system med overgangsmatrise A kalles lukket dersom

$$\sigma(A\vec{v}) = \sigma(\vec{v})$$

for enhver vektor $\vec{v}$, hvor

σ = komponentsum.

Prop: La $A = (a_{ij})$ være overgangsmatrisen til et dynamisk system. Da gjelder:

Alle søylesummene til A er lik 1 $\Leftrightarrow$ Systemet er lukket.

Bevis: A: $n \times n$ matrise.

$\vec{d} := (1, 1, \cdots, 1)$ n ganger.

Hvis $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$

er

$$\sigma(\vec{v}) = \vec{d} \cdot \vec{v}$$

Systemet er lukket

$\Leftrightarrow \sigma(A\vec{v}) = \sigma(\vec{v})$ for alle $\vec{v}$

$\Leftrightarrow \vec{d}A\vec{v} = \vec{d}\vec{v}$ — " —

$\Leftrightarrow (\vec{d}A - \vec{d})\vec{v}$ — " —

$\Leftrightarrow \vec{d}A = \vec{d}$

$\Leftrightarrow$ Alle søylesummene til A er lik 1. //

Def Den transponerte til en matrise A er matrisen A^T som man får ved å bytte om rader og søyler i A.

Eks: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

$$(v_1, v_2, \cdots, v_n)^T = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

$$(A^T)^T = A$$

Prop Hvis A er en kvadratisk matrise, så har A og A^T de samme egenverdiene.

Bevis: Senere. //

Husk: λ egenverdi for A

$\Leftrightarrow$ det finns en $\vec{v} \neq 0$ slik at

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$$

Prop: Ethvert lukket system har en likevektstilstand.

Bevis: La A være overgangsmatrisen til systemet. Da er alle radsummene til A^T lik 1, dvs.

$$A^T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \lambda = 1$$

Sjekk: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ c+d \end{pmatrix}$

↑ radsummene!

$\Rightarrow$ 1 er en egenverdi for A^T

$\Leftrightarrow$ ——— 11 ——— A

$\Leftrightarrow$ systemet har en likevektstilstand.

//

Poeng: Hvis λ er en egenverdi til en stokastisk matrise A,

se er $|\lambda| \leq 1$.

Bevis: La $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$

vær en egenvektor til A med

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}.$$

Da er

$$\lambda v_i = (A\vec{v})_i = \sum_j a_{ij} v_j$$

$$|\lambda| \cdot |v_i| \leq \sum_j |a_{ij} v_j|$$

↳ trekantulikheten

$$= \sum_j a_{ij} |v_j|$$

für alle i

$$|\lambda| \cdot \sum_i |v_i| \leq \sum_i \sum_j a_{ij} |v_j|$$

$$= \sum_j \left(\underbrace{\sum_i a_{ij}}_{\leq 1} \right) \cdot |v_j|$$

$$\leq \sum_j |v_j|$$

$$= \sum_i |v_i| > 0$$

$$\Rightarrow |\lambda| \leq 1. \qquad //$$