2.5 Spektralteori

Husk: La A være en reell $n \times n$ matrise. En vektor $v \neq 0$ kalles en *egenvektor* for A dersom det finnes et reelt tall λ slik at

$$A \cdot v = \lambda v.$$

I så fall kalles λ en *egenverdi* for A.

Prop: λ er en egenverdi for A $\Leftrightarrow \det(A - \lambda I) = 0.$

Bevis: "$\Rightarrow$": Anta $Av = \lambda v$, $v \neq 0$.

Da er

$$\underbrace{(A - \lambda I)}_{B} v = 0$$

Da kan B ikke vær inverterbar,

så $\det(B) = 0$.

(Hvis B var inverterbar, måtte

$v = B^{-1} \cdot 0 = 0$ ↯)

"$\Leftarrow$": Utelatt. //

Def: Det <u>karakteristiske polynomet</u> til en kvadratisk matrise A er definert ved

$$\chi_A(\lambda) := \det(A - \lambda I).$$

betraktet som polynom i λ.

Def: <u>Sporet</u> til en kvadratisk matrise

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \vdots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

er gitt ved

$$\operatorname{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$$

= summen av elementene på diagonalen

Eles: $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$.

$$\mathrm{tr}(A) = a + d$$

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

$$= \begin{vmatrix} (a-\lambda) & c \\ b & (d-\lambda) \end{vmatrix}$$

$$= (a-\lambda)(d-\lambda) - bc$$

$$= \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc$$

$$= \lambda^2 - \mathrm{tr}(A)\cdot\lambda + \det(A)$$

Eks:
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{tr}(A) = 3 - 2 = 1$$

$$\det(A) = -6 - (-4) = -2$$

$$\chi_A(\lambda) = \underset{a}{\lambda^2} - \underset{b}{\lambda} - \underset{c}{2}$$

Røttene til $\chi_A(\lambda)$:

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 8}}{2}$$

$$= \frac{1 \pm 3}{2}$$

dvs: $\lambda = 2$ eller $\lambda = -1$.

Altså: Egenverdiene til A er $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$.

Prop : For en 3×3 matrix A on a

$$\chi_A(\lambda) = -\lambda^3 + \mathrm{tr}(A)\lambda^2 - \frac{1}{2}\left[(\mathrm{tr}(A))^2 - \mathrm{tr}(A^2)\right]\lambda + \det(A).$$

Preuve for sous triangulaire (complexes) matrices:

$$A = \begin{pmatrix} a & ? & ? \\ 0 & b & ? \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{tr}(A) = a + b + c$$

$$\det(A) = abc$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & ? & ? \\ 0 & b & ? \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & ? & ? \\ 0 & b & ? \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a^2 & ? & ? \\ 0 & b^2 & ? \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{tr}(A^2) = a^2 + b^2 + c^2$$

$$\operatorname{tr}(A)^2 - \operatorname{tr}(A^2)$$

$$= (a+b+c)^2 - a^2 - b^2 - c^2$$

$$= 2(ab + bc + ac).$$

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

$$= \begin{vmatrix} (a-\lambda) & ? & ? \\ 0 & (b-\lambda) & ? \\ 0 & 0 & (c-\lambda) \end{vmatrix}$$

$$= (a-\lambda)(b-\lambda)(c-\lambda)$$

$$= -\lambda^3 + (a+b+c)\lambda^2$$

$$- (ab + bc + ac)\lambda$$

$$+ abc$$

$$= -\lambda^3 + \operatorname{tr}(A) \cdot \lambda^2$$

$$- \frac{1}{2}\left[\operatorname{tr}(A)^2 - \operatorname{tr}(A^2)\right)\lambda$$

$$+ \det(A) . \quad //$$

Eks: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$tr(A) = 1 + 1 + 0 = 2$

$$\det(A) = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 0 + (-2) \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2 + 2 = 4$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & ? & ? \\ ? & -1 & ? \\ ? & ? & -4 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{tr}(A^2) = -1-1-4 = -6$$

$$\chi_A(\lambda) = -\lambda^3 + \operatorname{tr}(A)\cdot\lambda^2 - \frac{1}{2}\left[\operatorname{tr}(A)^2 - \operatorname{tr}(A^2)\right]\lambda + \det(A)$$

$$= -\lambda^3 + 2\lambda^2 - \frac{1}{2}\left[4-(-6)\right]\lambda + 4$$

$$= -\lambda^3 + 2\lambda^2 - 5\lambda + 4$$

$$= -(\lambda - 1)(\lambda^2 - \lambda + 1)$$ (se nedenfor)

Rötterna till $\lambda^2 - \lambda + 1$:

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i$$

Konklusion: $\lambda = 1$ är den enda reella egenvärdet till A

Her er polynomdivisjonen brukt ovenfor:

$$(\lambda^3 - 2\lambda^2 + 5\lambda - 4) : (\lambda - 1) = \lambda^2 - \lambda + 4$$

$$\begin{array}{r|l}
\lambda^3 - \lambda^2 & \\
\hline
-\lambda^2 + 5\lambda - 4 & \\
-\lambda^2 + 1 & \\
\hline
4\lambda - 4 & \\
4(\lambda - 4) & \\
\hline
0 &
\end{array}$$

Mer om spektralteori

Husk: Hvis A er en $n \times n$ matrise:

$$Av = \lambda v, \quad v \neq 0.$$

v : egenvektor
λ : egenverdi.

λ egenverdi for $A \Leftrightarrow \chi_A(\lambda) = 0$.

Prop: Hvis A er inverterbar og

$Av = \lambda v, \quad v \neq 0$, så er

$$A^{-1}v = \lambda^{-1}v.$$

Bevis: $v = \underbrace{A^{-1}A}_{I} v = A^{-1}(\lambda v)$

$= \lambda A^{-1} v.$

Fadi $v \neq 0$, må $\lambda \neq 0$, og

$A^{-1} v = \lambda^{-1} v.$ //

Prop: Hvis A er en kvadratisk matrise, så har A og A^T de samme egenverdiene.

Bevis $(A-\lambda I)^T = A^T - \lambda I$

$$\det(A^T - \lambda I) = \det\left[(A-\lambda I)^T\right]$$

$$= \det(A-\lambda I)$$

$$\Rightarrow \chi_{A^T} = \chi_A. \quad //$$

Prop Hvis λ er en (reell) egenverdi til en ortogonal matrise A, så er $\lambda = \pm 1$.

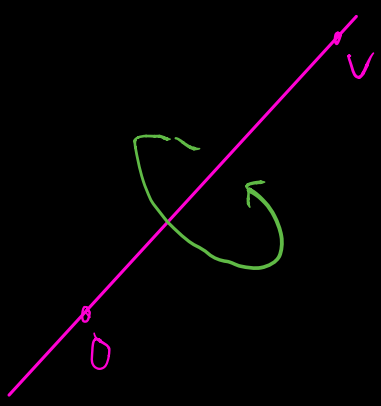
Bevis: La $Av = \lambda v$, $v \neq 0$.

$$0 < \underbrace{v \cdot v}_{\text{skalarprodukt}} = Av \cdot Av = \lambda v \cdot \lambda v$$

$$= \lambda^2 v \cdot v$$

$$\Rightarrow \lambda^2 = 1 \Leftrightarrow \lambda \neq \pm 1. \quad //$$

Teorem Hvis A er en ortogonal 3×3 matrise og $\det(A) = 1$, så er $\lambda = 1$ en egenverdi for A.



rotasjonsakse

Bevis $A - I = A - A^T A$

$= (I - A^T) A$

$= (I - A)^T \cdot A$

$\Rightarrow \det(A - I) = \det[(I - A)^T] \cdot \det(A)$

$= \det(I - A)$

$= (-1)^3 \det(A - I)$

$$= -\det(A - I)$$

$$\Rightarrow \det(A - I) = 0$$

$\Leftrightarrow$ $\lambda = 1$ er en egenverdi for A.

<u>Lemma</u> Hvis A og C er $n \times n$ matriser og C er invertibel, så har A og CAC^{-1} det samme karakteristiske polynom.

Bevis:

$$CAC^{-1} - \lambda I = C(A - \lambda I)C^{-1}$$

$$\chi_{CAC^{-1}}(\lambda) = \det(CAC^{-1} - \lambda I)$$

$$= \det(C) \cdot \det(A - \lambda I) \cdot \det(C)^{-1}$$

$$= \chi_A(\lambda). \quad //$$

Teorem (Cayley-Hamilton)

For enhver $n \times n$ matrise A gjelder

$$\chi_A(A) = 0$$

Dette betyr: hvis

$$\chi_A(\lambda) = c_n\lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + c_1\lambda + c_0,$$

så er

$$\chi_A(A) = c_n A^n + c_{n-1}A^{n-1} + \cdots + c_1 A + c_0 I$$

Begrunnelse idé bak bevis:

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I).$$

$$\chi_A(\lambda) \overset{?}{=} \det(A - \lambda I) = 0$$

↳ ikke oppgitt!

Bevisskisse

Tilfelle 1: A diagonal.

For $n = 2$:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 - \lambda & 0 \\ 0 & \lambda_2 - \lambda \end{pmatrix}$$

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

$$= (\lambda_1 - \lambda) \cdot (\lambda_2 - \lambda)$$

$$= \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + \lambda_1 \lambda_2$$

$$\chi_A(A) = A^2 - (\lambda_1 + \lambda_2) A + \lambda_1 \lambda_2 I$$

$$= (A - \lambda_1 I)(A - \lambda_2 I)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 - \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 - \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= 0 .$$