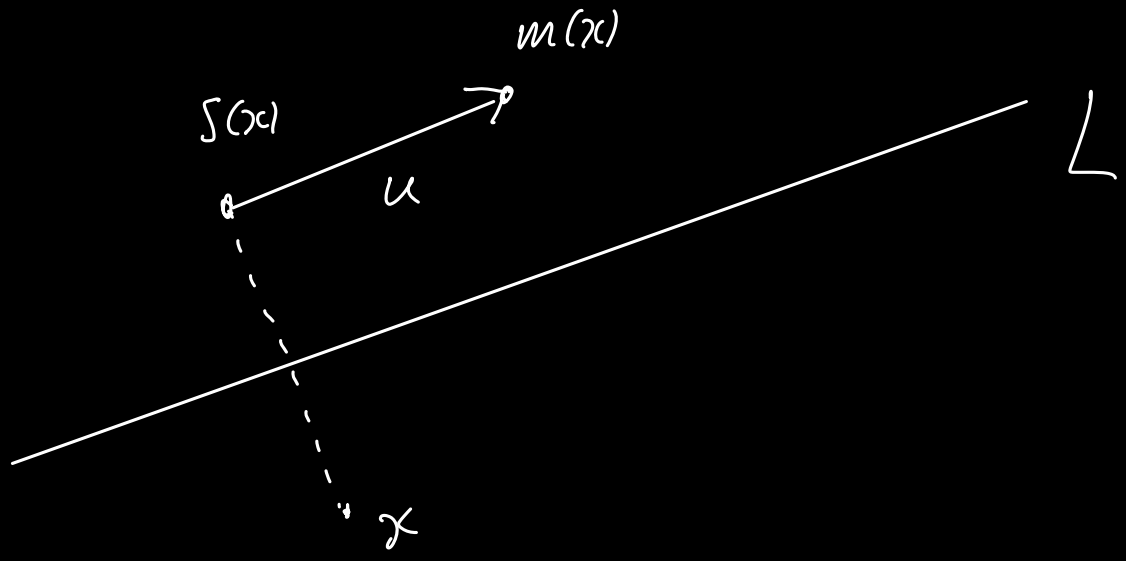
Def La $S: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ være speilingen i en linje L, og $u \neq 0$ en vektor parallell med L.

Operasjonen $m: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gitt ved

$$m(x) = S(x) + u$$

kalles da en <u>glidespeiling</u> langs L.



Eks: $m\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 1 \\ -x_2 \end{pmatrix}$

Glidespeiling langs x-aksen

Her er $S\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}$, $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Def: La $m: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ vær en avbildning. Et punkt $x \in \mathbb{R}^n$ kalles et fikspunkt for m dersom

$$m(x) = x.$$

$F_m :=$ mengden av fikspunkter.

Klassifikasjon av stive bevegelser i planet.

Teorem: Enhver ikke-trivielle isometri $m : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ er av nøyaktig én av følgende typer:

(i) Translasjon, med $F_m = \emptyset$.
(den tomme mengde)

(ii) Rotasjon om et punkt p, med $F_m = \{p\}$.

(iii) Speiling om en linje L, med $F_m = L$.

(iv) Glidespeiling langs en linje L, med $\bar{F}_m = \emptyset$.

Bevis: La $m(x) = Ax + b$, hvor A er en ortogonal 2×2 matrise og $b \in \mathbb{R}^2$.

Tilfelle 1: $A = \underline{I}$. Da er

$m(x) = x + b$: Translasjon

Tilfelle 2 $A \neq I$, $\det(A) = 1$.

Da er 1 ikke en egenverdi for A, så $A - \underline{I}$ er invertibel.

Ser etter et fikspunkt for m:

$$Ax + b = x \iff x = -(A-I)^{-1} \cdot b.$$

Alltså har m nøyaktig ett fikspunkt, nemlig

$$p = -(A-I)^{-1} \cdot b.$$

$$\begin{aligned} p + A(x-p) &= Ax + p - Ap \\ &= Ax + b \\ &= m(x). \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ m er en rotasjon om p.

<u>Tilfelle 3</u> $\det(A) = -1$.

Da har A egenverdiene ± 1.

Velg egenvektorer u, v med

$$Au = u, \quad Av = -v.$$

Da er (u, v) en basis for $\mathbb{R}^2$, kan vi skrive

$$b = su + tv, \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

La $p := \frac{t}{2} \cdot v$. Vi finner at

$$\begin{aligned} & p + A(x - p) + su \\ &= \frac{t}{2} \cdot v + Ax + \frac{t}{2} \cdot v + su \\ &= Ax + su + tv \\ &= Ax + b \\ &= m(x) \end{aligned}$$

⇒ Hvis $s = 0$, er m en speiling i linjen $L = \{p + su \mid s \in \mathbb{R}\}$, ellers er m en glidespeiling langs L. //

Def: En isometri $m: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sies å ha <u>endelig orden</u> dersom det finnes en $k \geq 1$ slik at

$$m^k = Id.$$

Den minste slike k kalles da <u>ordenen til m</u>.

Her er $m^k = m \circ m \circ \cdots \circ m$ (k ganger)

$m^3(x) = m(m(m(x)))$

Id = identitetsavb. : $Id(x) = x$.

Eks: * En speiling har orden 2.

* Rotasjonen $R_{2\pi/k}$ har orden k $(k \geq 1)$.

* Hvis θ er et irrasjonalt tall, så har R_θ ikke endelig orden.

Prop: Hvis $m: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ har orden k og $m(x) = Ax + b$, så er

$$A^k = I.$$

Bevis: $m^2(x) = A(Ax + b) + b$

$$= A^2x + Ab + b$$

$$\vdots$$

$$m^k(x) = A^k x + \sum_{i=0}^{k-1} A^i b$$

Altså: $m^k = Id$

$\Updownarrow$

$$A^k = I \text{ og } \sum_{i=0}^{k-1} A^i b = 0. \quad //$$

4.3 Symmetrier av plane figurer

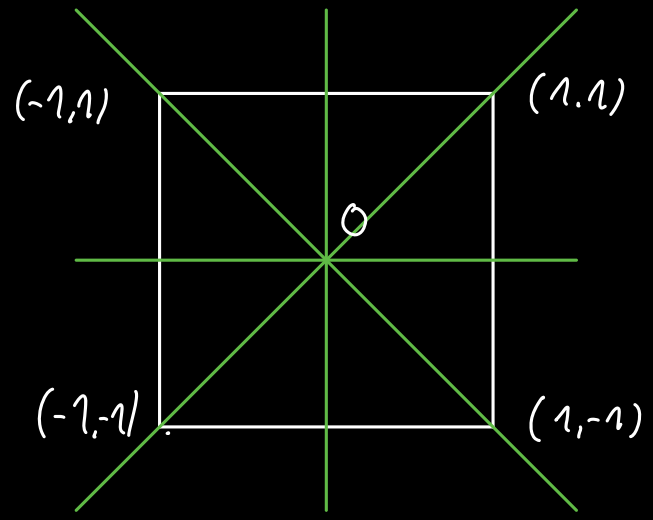
Def: La $F \subset \mathbb{R}^n$ være en delmengde. En <u>symmetri</u> av F er en isometri $m: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ slik at $m(F) = F$.

$(\; m(F) = \{ m(x) \mid x \in F \} \;)$

$Sym(F)$:= mengden av alle symmetrier av F

: <u>symmetrigruppa</u> til F

<u>Eks:</u> F = kvadrat i $\mathbb{R}^2$.



Speilingslinjer

$Sym(F)$ består av 8 elementer:

* Rotationer om 0 med vinkel

$$\theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}.$$

* Speglingar om

x-axeln,

y-axeln,

linjen $x = y$,

" $x = -y$.

Def: (i) $E(n)$:= mängden av alla isometrier $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

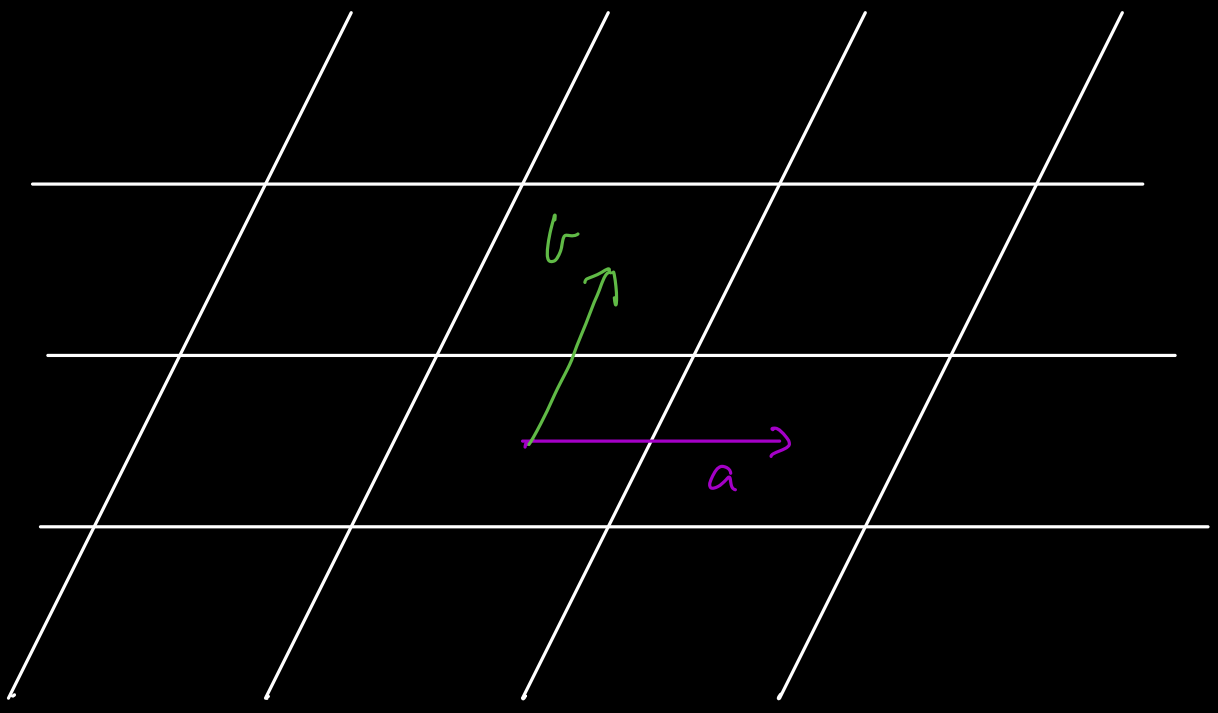
kallas den Euklidiska gruppen i dim. n.

(ii) En (ikke-tom) delmengde $G \subset E(n)$ kalles en undergruppe av $E(n)$ dersom følgende holder for alle $g, h \in G$:

$$g^{-1} \in G. \qquad g \circ h \in G.$$

Eks: For $F \subset \mathbb{R}^n$ er $\mathrm{Sym}(F)$ en undergruppe av $E(n)$.

4.4 Plane krystaller



Symmetrier: $\tilde{T}_{ma+nb}$, $m, n \in \mathbb{Z}$.
180° rotasjoner.

Def: En delmengde $B \subset \mathbb{R}^n$ kalles begrenset dersom det finnes en $r > 0$ slik at $\|x\| < r$ for alle $x \in B$.

Def En undergruppe $G \subset E(2)$ kalles **krystallografisk** dersom:

* Det finns en begrenset delmengde $B \subset \mathbb{R}^2$ slik at mengdene $g(B)$, $g \in G$, dekker hele $\mathbb{R}^2$.

* G inneholder ikke ikke-trivielle elementer vilkårlig nær Id. Med andre ord: Det finns en $\varepsilon > 0$ slik at G ikke inneholder noen translasjon Ta med $0 < \|a\| < \varepsilon$ eller noen

rotasjon med vinkel θ som tilfredsstiller $0 < |\theta| < \varepsilon$.

Def En delmengde $F \subset \mathbb{R}^2$ kalles en krystallstruktur dersom symmetrigruppen $\mathrm{Sym}(F)$ er krystallografisk.