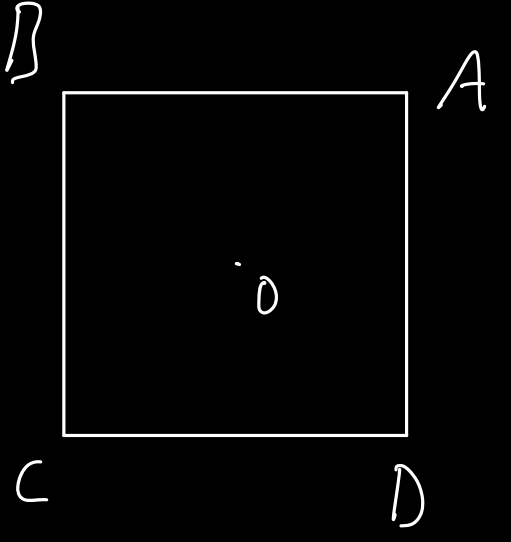
Mer om symmetrigrupper (fra 7.1)

Eks: Symmetrigruppe til et kvadrat.



K.

$A = (1,1)$

$B = (-1,1)$

$C = (-1,1)$

$D = (1,-1)$.

ρ = rotasjon om origo med vinkel $\frac{\pi}{2}$.

$\rho^4 = Id$

Matrisen til $\rho = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Orienteringsbevarende symmetrier av K:

$\{Id, \rho, \rho^2, \rho^3\}$.

μ = speiling om x-aksen

$\mu^2 = Id$.

Orienteringsreverserende symmetrier av K:

$\{\mu, \rho\mu, \rho^2\mu, \rho^3\mu\}$.

$\Rightarrow Sym(K) = \{Id, \rho, \rho^2, \rho^3, \mu, \rho\mu, \rho^2\mu, \rho^3\mu\}$.

som mengde.

Det gjenstår å bestemme multiplikasjonen i $Sym(K)$.

Eks: $\rho^3 \cdot \mu\rho^2$ ← ønsker

$\mu\rho = ?$

$$\mu\rho\mu(A1 = \mu\rho(D) = \mu(A1 = D$$
$$= \rho^{-1}(A1$$

$\Rightarrow$ $\mu\rho\mu = \rho^{-1}$

$\Rightarrow$ $\mu\rho = \rho^{-1}\mu$.

<u>Lemma</u> For alle $i \geq 0$ er

$$\mu\rho^i = \rho^{-i}\mu.$$

hvor $\rho^{-i} = (\rho^{-1})^i = (\rho^i)^{-1}$.

$\rho^0 = Id$.

<u>Bevis</u>: $i = 0, 1$: Allerede vist.

Anta $i \geq 1$ og at $\mu\rho^i = \rho^{-i}\mu$.

Da er

$$\mu\rho^{i+1} = \mu\rho^i \cdot \rho = \rho^{-i}\mu\rho$$
$$= \rho^{-i}\cdot\rho^{-1}\mu = \rho^{-i-1}\mu$$

Ved induksjon må $\mu\rho^i = \rho^{-i}\mu$ for alle $i \geq 0$. //

<u>Korollar</u>: For alle $i, j \geq 0$ er
$$\rho^i\mu\rho^j = \rho^i\rho^{-j}\mu = \rho^{i-j}\mu.$$

Vi ser at multiplikasjonen i $\mathrm{Sym}(K)$ er bestemt av relasjonene
$$\rho^4 = \mu^2 = \mathrm{Id}, \quad \mu\rho = \rho^{-1}\mu.$$

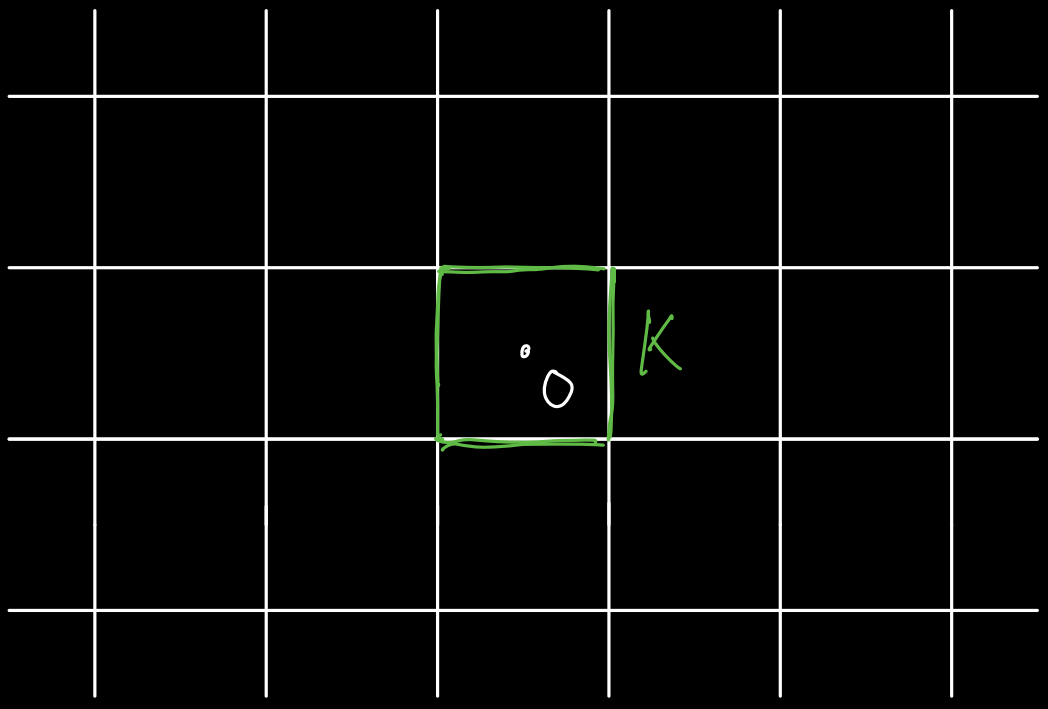
Vi skriver derfor

$$\mathrm{Sym}(K) = \langle \underbrace{\rho, \mu}_{\text{generatorer}} \mid \rho^4 = \mu^2 = \mathrm{Id}, \underbrace{\mu\rho = \rho^{-1}\mu}_{\text{relasjoner}} \rangle$$

$$= \text{diedergruppa } D_4.$$

Eks: Symmetrigruppa til krystallstrukturen $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^2$ med hjørner

$$\left(m + \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}\right), \quad m, n \in \mathbb{Z}.$$



P

Prop: $Sym(\mathcal{P})$ består av alla isometrier

$$m(x) = Ax + v$$

hvor

* A representerar en symmetri av kvadratet K,
* $v \in \mathbb{Z}^2$.

Bevis: (i) Enhver slik isometri
må bevare P: Opplagt.
(iii) La $m(x) = Ax + v$ være
en vilkårlig symmetri av P,
hvor A er en ortogonal 2×2
matrise og $v \in \mathbb{R}^2$. Da må

$$v = m(0)$$

være senteret i en celle i P,
så $v \in \mathbb{Z}^2$. Isometrien

$$m'(x) = m(x) - v = Ax$$

er en symmetri av P som
bevarer origo, så $m'(P) = P$. //

Korollar: $Sym(P)$ kan identifiseres med $D^4 \times \mathbb{Z}^2$ som mengde.

Produktet i $Sym(P)$: La

$$m_1(x) = A_1 x + v_1$$

$$m_2(x) = A_2 x + v_2.$$

Da er

$$m_2(m_1(x)) = A_2(A_1 x + v_1) + v_2$$

$$= A_2 A_1 x + A_2 v_1 + v_2$$

Som gruppe er $Sym(P)$ et semi-direkte produkt:

$$\mathrm{Sym}(B) = D^4 \rtimes \mathbb{Z}^2.$$

7.2 Abstrakta grupper

Def: En grupp är en mängd G utstyrt med en binär operation

$$\mu : G \times G \to G, \quad (g,h) \mapsto gh$$

som uppfyller följande behingelser:

(i) Associativitet: För alla $g_1, g_2, g_3 \in G$ är

$$(g_1 g_2) g_3 = g_1 (g_2 g_3)$$

(ii) Existens av et enhetselement:

Det finns et element $e \in G$ sådant att

$$eg = ge = g \quad \text{för alla } g \in G.$$

(iii) Existens av inverser:

För varje $g \in G$ finns det ett element $g^{-1} \in G$ sådant att

$$gg^{-1} = g^{-1}g = e.$$

Obs: * Elementet e är entydigt bestämt av (ii): Om $e' \in G$ har den samma egenskap, alltså

$$e'g = ge' = g \quad \text{för alla } g \in G,$$

Så er

$$e = ee' = e'.$$

* Et likende argument viser at elementet g^{-1} er entydig bestemt.

Notasjon: Hvis $g \in G$ definerer vi

$g^2 = gg$, $g^3 = ggg$,

$g^n = g \cdots g$ (n ganger, for $n \geq 1$)

$g^0 = e$.

$g^{-n} = (g^{-1})^n = (g^n)^{-1}$ for $n \geq 1$.

$gh = hg$? Ikke alltid!

Def: En gruppe G med binæroperasjon μ kalles **abelsk** dersom

$$\mu(g,h) = \mu(h,g)$$

for alle $g, h \in G$.

Merk: I dette hjelpeskrivet vil $g+h$ i stedet for $\mu(g,h)$, og

$$ng = g + g + \cdots + g \quad (n \text{ ganger}), \quad n \geq 1.$$

Eksempler:

① $\mathbb{Z}$ er en abelsk gruppe med

$\mu(m,n) = m+n.$

(2) $\mathbb{R}$ är en abelsk grupp

(3) Ethvert vektorrum är en abelsk grupp under addition

(4) $GL(n,\mathbb{R}) = \{$mängden av alla invertibla $n \times n$ reella matriser$\}$
: grupp under matrismultiplikation

(5) Symmetrigruppa på en delmängd av $\mathbb{R}^n$.