Spektralteoremet Hvis A er en symmetrisk $n \times n$ matrise, så har $\mathbb{R}^n$ en ortonormert basis som består av egenvektorene til A.

Ekvivalent: $A = CDC^{-1}$,

hvor

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

og C er ortogonal.

Eks:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Finn egenvektorene og egenverdiene til A.

$$tr(A) = 2$$

$$det(A) = 1 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = -3$$

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - tr(A) \cdot \lambda + det(A)$$

$$= \lambda^2 - 2\lambda - 3$$

$$= (\lambda + 1)(\lambda - 3).$$

$\Rightarrow$ A har egenverdier

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 3.$$

Egenrommet til $\lambda_1 = -1$

$$= \{ v \in \mathbb{R}^2 \mid Av = -v \}$$

$$Av = -v \iff (A+I)v = 0$$

$$A + I = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

$$0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x+y \end{pmatrix}$$

$$\iff x + y = 0.$$

Alltså är $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$ en bas för egenrummet till $\lambda_1 = -1$.

Eigenraum für $\lambda_2 = 3$

$$= \{ v \in \mathbb{R}^2 \mid Av = 3v \}$$

$$Av = 3v \iff (A - 3I)v = 0$$

$$A - 3I = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= 2 \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Sei $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$:

$$Av = 3v \iff 0 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -x + y \\ x - y \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow \quad x = y$

Altså är $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ en bas för egenrummet till $\lambda_2 = 3$.

Men: $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

är en ortonormerad bas för $\mathbb{R}^2$ som består av egenvektorer till A.

4.1 Geometrisk tolkning av lineær avbildninger

Vi studerer lineær avbildninger

$$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2.$$

Def: Følgende to typer lineær avbildninger $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ kalles elementær:

(i) Skalering, gitt ved en matrise

$$\begin{pmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_2 \end{pmatrix},$$

hvor $t_1, t_2 \neq 0$. Spesialtilfeller:

$$X_t = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Y_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix},$$

hvor $t \neq 0$.

(ii) Permutering, med matrise

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(iii) <u>Forskyving</u>, med matrise

$$\bar{F}_t = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

hvor $t \in \mathbb{R}$.

Matrisene X_t, Y_t, σ og $\bar{F}_t$ kalles <u>elementær</u>.

Mech: $(X_t)^{-1} = X_{t^{-1}}$

$(Y_t)^{-1} = Y_{t^{-1}}$

$$\sigma\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

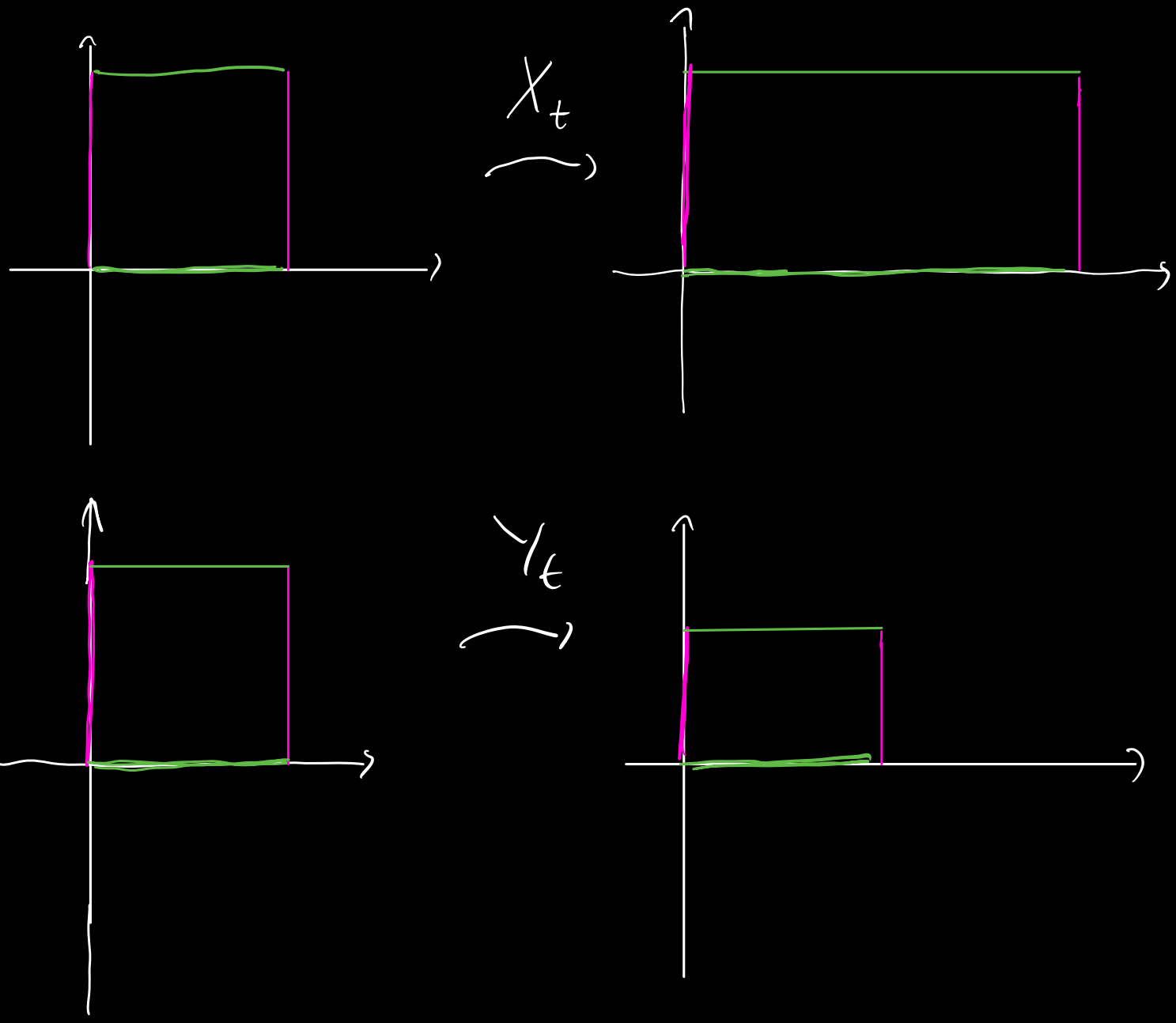
$$\Rightarrow \quad \sigma^{-1} = \sigma.$$

$$F_{t_1} F_{t_2} = \begin{pmatrix} 1 & t_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & t_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

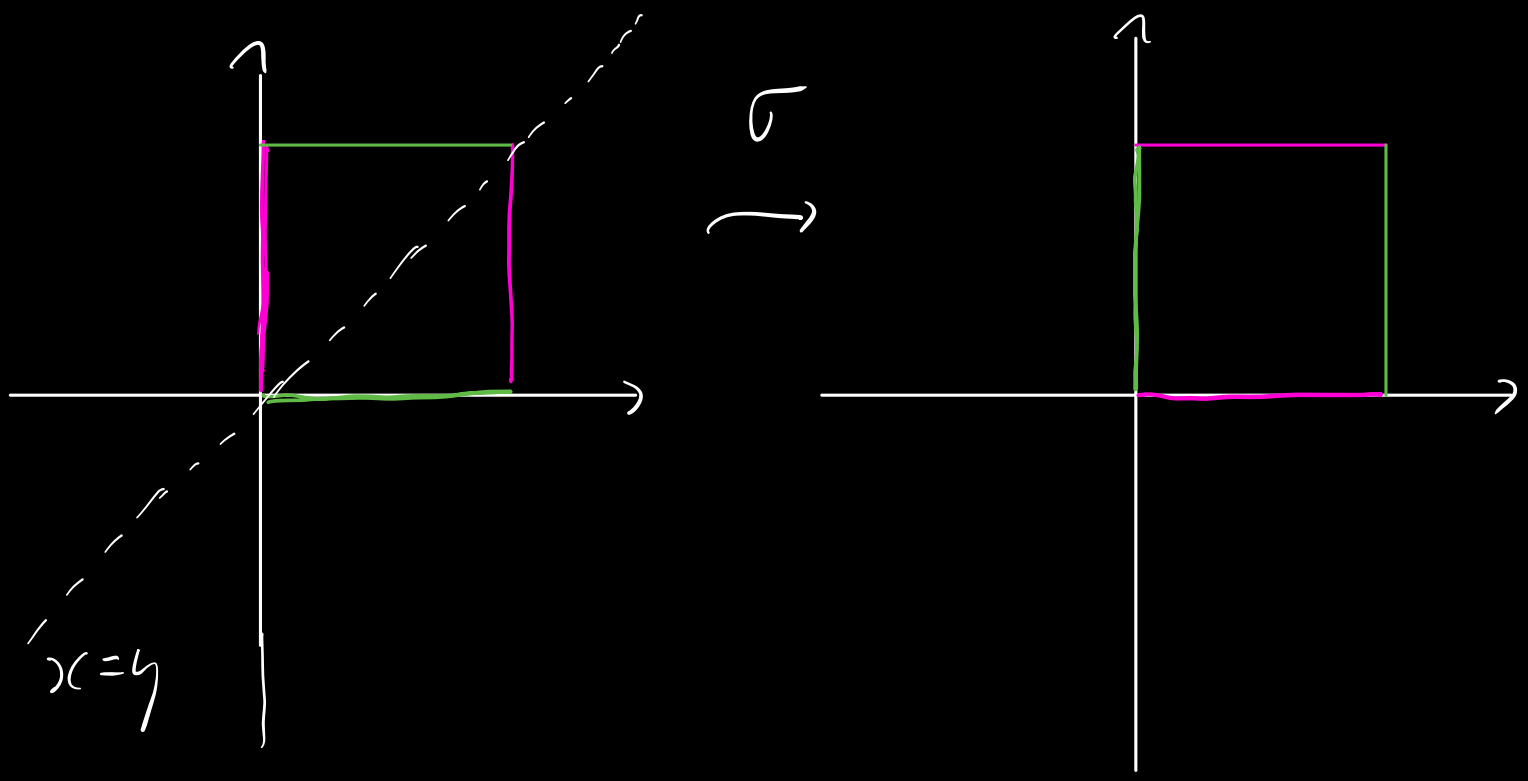
$$= \begin{pmatrix} 1 & t_1+t_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = F_{t_1+t_2}.$$

Geometrisk beskrivelse:

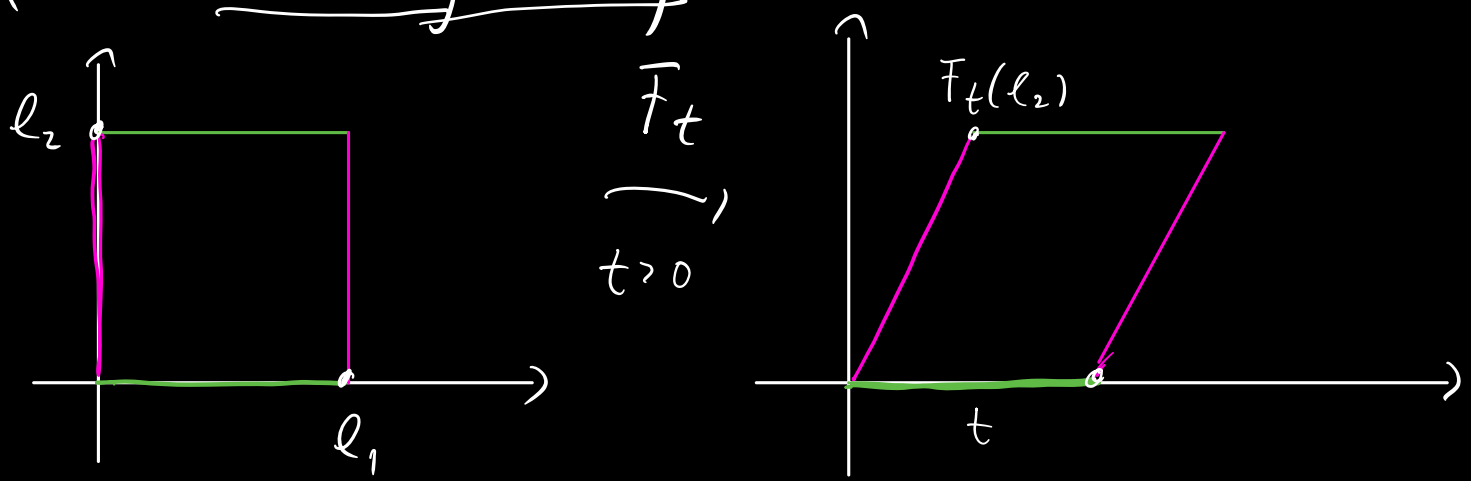
til skalering:



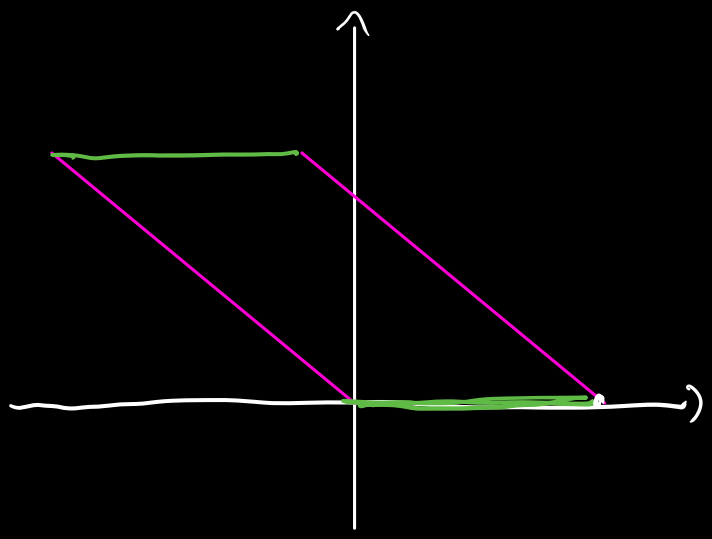
(ii) Permutering : Spejling i linjen $x=y$:



(iii) Forskydning :



$\downarrow F_t$, $t < 0$



$$F_t(e_1) = e_1$$

$$F_t(e_2) = te_1 + e_2$$

Teorem Enhver invertibel 2×2 matrise kan skrives som et produkt av elementære matriser.

Bevis: Vi eksperimenterer litt:

$$\begin{pmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 a & t_1 c \\ t_2 b & t_2 d \end{pmatrix}$$

Første rad multl. med t_1, annen rad med t_2

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 a & t_2 c \\ t_1 b & t_2 d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & d \\ a & c \end{pmatrix}$$

Bytter om radene

$$\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+tb & c+td \\ b & d \end{pmatrix}$$

Erstatter rad I

med I + t II.

La nå $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ være invertibel.

(i) A øvre triangulær, dvs. $b = 0$.

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= Y_d F_c X_a$$

(ii) $b \neq 0$.

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{a}{b} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & c - \frac{ad}{b} \\ b & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & c - \frac{ad}{d} \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & d \\ 0 & c - \frac{ad}{b} \end{pmatrix}$$

$$= \underset{\text{tilfelli (i)}}{} E_1 E_2 E_3 ,$$

hver E_i er elementær.

$$\sigma F_{-\frac{a}{b}} A = E_1 E_2 E_3$$

$$\Rightarrow A = F_{\frac{a}{b}} \sigma E_1 E_2 E_3 . \quad //$$

4.2 Stive begreber i planet

Husk: For $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$\|v\| = \sqrt{v \cdot v} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2}$$

: normen til v.

Avstanden mellom to punkter $x, y \in \mathbb{R}^n$ er $\|x - y\|$.

Def: En avbildning $m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ kalles en isometri dersom

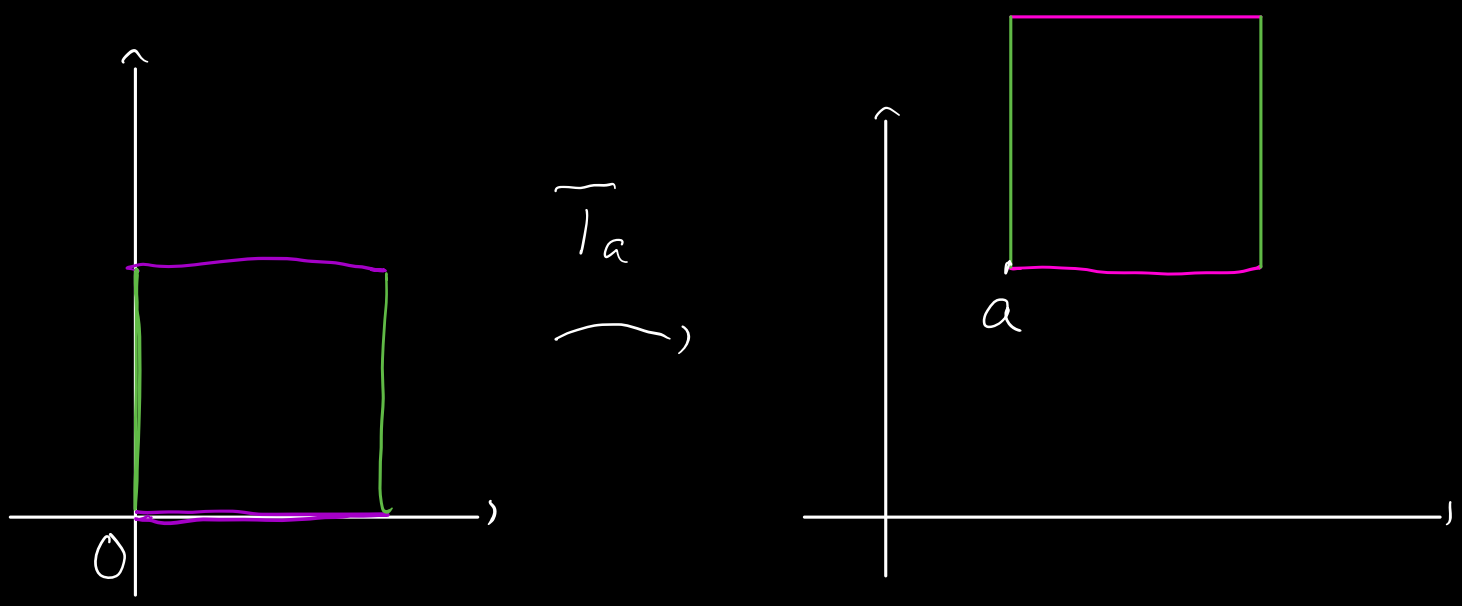
$$\|m(x) - m(y)\| = \|x - y\|$$

for alle $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Def: En <u>translasjon</u> i $\mathbb{R}^n$ er en avbildning $T_a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ gitt ved

$$T_a(x) = x + a \qquad (x \in \mathbb{R}^n),$$

hvor $a \in \mathbb{R}^n$.



Merke: $\bar{T}_b(\bar{T}_a(x)) = x + a + b$

$= \bar{T}_{a+b}(x)$

$\bar{T}_a(x+y) = x + y + a$

$\bar{T}_a(x) + \bar{T}_a(y) = (x + a) + (y + a)$

$= x + y + 2a$

Alltså: Hvis $a \neq 0$, er T_a

ikke en lineær avbildning!

Prop: T_a er en isometri.

Bevis: For $x, y \in \mathbb{R}^n$ er:

$$\| T_a(x) - T_a(y) \| = \| (x+a) - (y+a) \|$$

$$= \| x - y \|. \quad //$$