Husk: En $n \times n$ matrise A kalles ortogonal dersom $A^T \cdot A = I$.

Har vist:

A ortogonal $\Leftrightarrow \begin{cases} Ax \cdot Ay = x \cdot y \\ \text{for alle } x, y \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$

Prop: Hvis A og B er ortogonale $n \times n$ matriser, gjelder:

(i) A^{-1} er ortogonal

(ii) AB er ortogonal.

Beweis: (i)

$$A^{-1}x \cdot A^{-1}y = A(A^{-1}x) \cdot A(A^{-1}y)$$

$$= x \cdot y.$$

(ii) $$ABx \cdot ABy = Bx \cdot By$$

$$= x \cdot y. \quad \#$$

Prop: Ist A ein orthogonale $n \times n$ Matrix, so ist durch

$$m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad m(x) = Ax$$

en isometri.

Bevis: For alle $z \in \mathbb{R}^n$ er

$$\|Az\|^2 = Az \cdot Az = z \cdot z = \|z\|^2$$

$$\Rightarrow \|Az\| = \|z\|.$$

Vi velger nå $z = x - y$ og får

$$\|Ax - Ay\| = \|A(x-y)\|$$

$$= \|x - y\|. \quad //.$$

Teorem For en avbildning

$$m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

er følgende ekvivalent:

(i) Avbildningen m er en isometri og $m(0) = 0$.

(ii) $m(x) \cdot m(y) = x \cdot y$ for alle $x, y \in \mathbb{R}^n$.

(iii) Det finnes en ortogonal $n \times n$

matrisa A slik at for alle $x \in \mathbb{R}^n$:

$$m(x) = Ax.$$

Bevis: (i) $\Rightarrow$ (ii):

For alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ er:

$$\|m(x) - m(y)\| = \|x - y\|.$$

For $y = 0$: $\|m(x)\| = \|x\|.$

$$(x-y)\cdot(x-y) = x\cdot x - 2x\cdot y + y\cdot y$$

$$x\cdot y = \frac{1}{2}\left(\|x-y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\|m(x) - m(y)\| - \|m(x)\|^2 - \|m(y)\|^2 \right)$$

$$= m(x) \cdot m(y).$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii): La $\{e_1, \dots, e_n\}$ være standardbasis for $\mathbb{R}^n$. La A være $n \times n$ matrisen med søyler $m(e_1), \dots, m(e_n)$. Av (ii) følger at A er ortogonal. La

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,$$
$$f(x) = A^{-1} m(x).$$

Da er

$$f(e_i) = e_i.$$

$\forall x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$f(x) \cdot f(y) = A^{-1} m(x) \cdot A^{-1} m(y)$$

$$= m(x) \cdot m(y)$$

$$= x \cdot y.$$

La $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Da er

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i.$$

Vi kan skrive

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} t_i e_i, \quad t_i \in \mathbb{R},$$

$$t_i = f(x) \cdot e_i = f(x) \cdot f(e_i)$$
$$= x \cdot e_i = x_i$$

$\Rightarrow$ $f(x) = x$ for alla x

$\|$

$A^{-1} m(x)$

$\Rightarrow$ $m(x) = Ax$.

(iii) $\Rightarrow$ (i) : Vist tidligere.

//

<u>Teorem</u> Enhver isometri $m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ kan uttrykkes på formen

$$m(x) = Ax + v,$$

hvor A er en ortogonal $n \times n$ matrise og $v \in \mathbb{R}^n$.

Bevis: La $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$,

$$T(x) = m(x) - m(0).$$

Da er T en isometri og $T(0) = 0$, så det finnes en ortogonal matrise A slik at

$$T(x) = Ax.$$

$$\Rightarrow \quad m(x) = T(x) + m(0)$$

$$= Ax + \underbrace{m(0)}_{v}. \qquad //.$$

Merk: A og v er entydig bestemt av m:

$$v = m(0)$$

$$Ax = m(x) - m(0).$$

Husk: A ortogonal $\Rightarrow \det(A) = \pm 1$.

Def: En isometri $m(x) = Ax + v$ kalles

* orienteringsbevarende dersom $\det(A) = 1$,
* orienteringsreverserende, dersom $\det(A) = -1$.

Prop Enhver isometri $m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ er bijektiv, dvs. for hver $y \in \mathbb{R}^n$ finns det nøyaktig én $x \in \mathbb{R}^n$ slik at

$$m(x) = y.$$

Bevis La $m(x) = Ax + v$. Siden

$$Ax + v = y \iff x = A^{-1}(y - v),$$

har likningen $m(x) = y$ nøyaktig én

Løsning, så m er bijektiv. //

Merk: Den inverse avbildningen

$$m^{-1}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

er gitt ved $m^{-1}(y) = A^{-1}(y - v)$.

Prop: (i) Hvis $m: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ er en isometri, så er også den inverse avbildningen

$$m^{-1}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

en isometri.

(ii) Dacă $m_1, m_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sunt izometrii, atunci

$$m_1 \circ m_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

este izometrie.

Demo: Exercițiu. ∎

Mersh: Dacă

$$m_1(x) = A_1 x + v_1$$

$$m_2(x) = A_2 x + v_2.$$

$$m_1(m_2(x)) = A_1(A_2 x + v_2) + v_1$$

$$= A_1 A_2 x + A_1 v_2 + v_1$$

Prop En ortogonal 2×2 matrise er enten

* en **rotasjonsmatrise**

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \theta \in \mathbb{R}$$

med $\det(R_\theta) = 1$, eller

* en **speilingsmatrise**

$$S_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}, \quad \theta \in \mathbb{R}$$

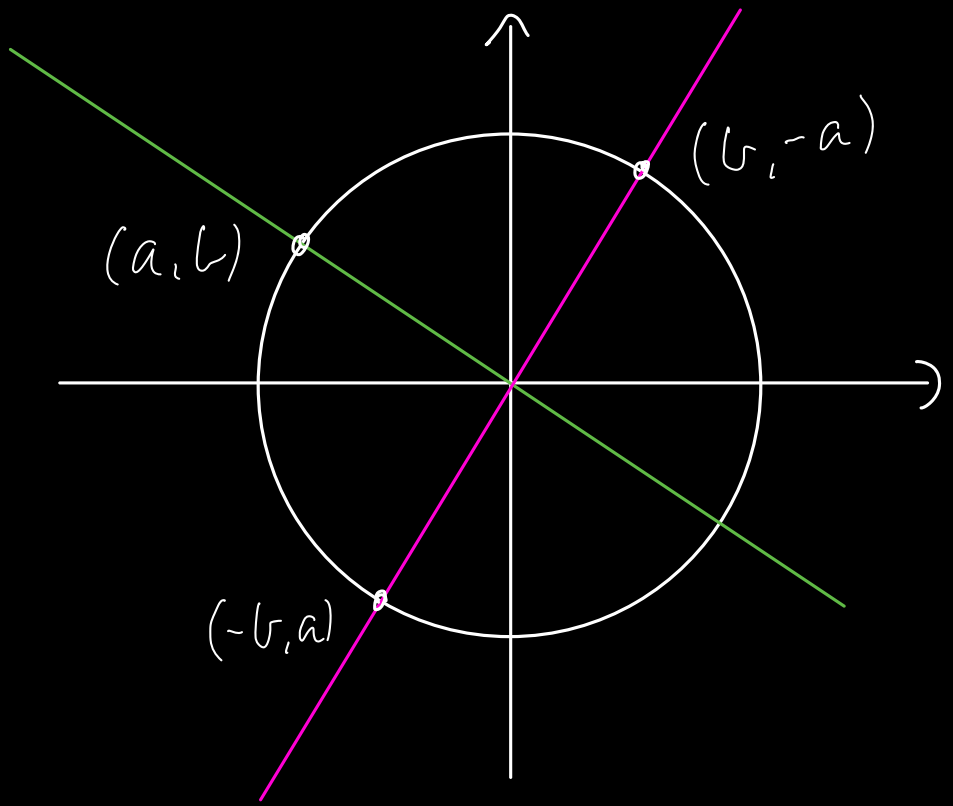
med $\det(S_\theta) = -1$.

Beweis: La $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$.

Da er

$$a^2 + b^2 = 1 = c^2 + d^2$$

$$ac + bd = 0.$$



Den siste likningen gir

$$(c, d) = t(-b, a)$$

for et reelt tall t.

$$1 = c^2 + d^2 = t^2(b^2 + a^2) = t^2$$

$$\Rightarrow t = \pm 1.$$

altså $(c, d) = \pm(-b, a)$.

Velg $\theta \in \mathbb{R}$ slik at

$$a = \cos\theta, \quad b = \sin\theta. \qquad //$$

Ehs: $R_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$R_{\pi} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$R_{\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$R_{\frac{\pi}{3}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$R_{\frac{\pi}{4}} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$

Orienteringsbevarande / - reverserande:

