Prøveeksamenssett nr. 2

Oppgave 1

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a)
$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$+ 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 2(0 - (-2)) + (0 - 2) + (-1 - 1)$$

$= 4 - 2 - 2 = 0.$

b) (v_1, v_2, v_3) lineært avhengige

$\Leftrightarrow \det(M) = 0.$

Søker nullfra tall a_1, a_2, a_3, ikke alle 0, slik at $a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 = 0.$

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 = \begin{pmatrix} 2a_1 - a_2 + a_3 \\ a_1 + a_2 + 2a_3 \\ a_1 - a_2 \end{pmatrix}$$

Vi får $a_2 = a_1$

$$a_3 = a_2 - 2a_1 = -a_1$$

Vi velger $a_1 = 1$. Da blir $a_2 = 1$, $a_3 = -1$, så

$$v_1 + v_2 - v_3 = 0.$$

c) Vi velger

$$v = v_1 \times v_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \cdot i - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \cdot j + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \cdot k$$

$$= -2i - (-2 - (-1))j + 3k$$

$$= -2i - (-1)j + 3k$$

$$= -2i + j + 3k$$

$$= \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Oppgave 2 A er en invertibel $n \times n$ matrise.

a) La $u \in \mathbb{R}^n$, $x = A^{-1}u$. Da er

$$Ax = A(A^{-1}u) = (AA^{-1})u = Iu = u.$$

b) La $\langle x, y \rangle = (Ax)^T(Ay) = Ax \cdot Ay$

$$\langle x, x \rangle = Ax \cdot Ax = \|Ax\|^2 \geq 0,$$

hvor $\|\cdot\|$ betegner den Euklidiske normen.

$$\langle x, x \rangle = 0 \iff \|Ax\| = 0$$

$$\iff Ax = 0$$

$$\iff x = 0 \quad \text{fordi } A \text{ er invertibel.}$$

c) Hvis A ikke er invertibel, så finnes

en $x \neq 0$ slik at $Ax = 0$. Da blir

$\langle x, x \rangle = 0$.

Oppgave 3

$T(\vec{v}) = A\vec{v} + \vec{b}$, hvor

$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. La $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

a) $T(\vec{v}) = \vec{v} \iff A\vec{v} + \vec{b} = \vec{v}$

$\iff (I - A)\vec{v} = \vec{b}$

$\iff \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\iff x + y = 1$.

Fikspunktmengden til T er linja $x + y = 1$, altså er T speilingen i denne linja.

b) Fordi T er en speiling, er $T^2 = Id$.

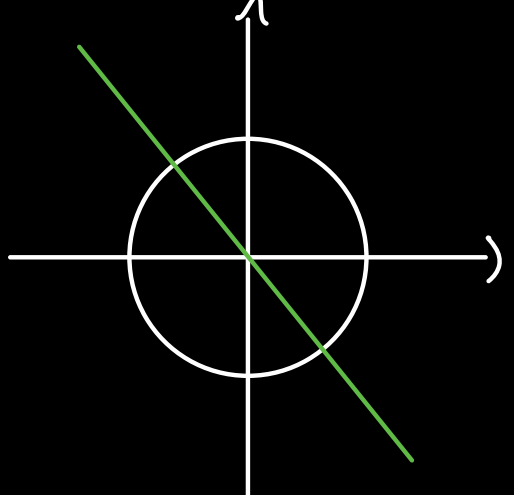
c) $T \neq Id$, $T^2 = Id \Rightarrow T$ har orden 2.

Oppgave 4

S = symmetrigruppa til en sirkel i planet med sentrum p.

a) S består av rotasjoner om p og speilinger i linjer gjennom p.

b) Vi betrakter enhetssirkelen om origo



La σ vere speilingen i linja gjennom origo og $\vec{u} = (\cos\theta, \sin\theta)$. Siden $\vec{v} = (\sin\theta, -\cos\theta)$ er en normalvektor til $\vec{u}$, er matrisen A til σ lik Householder-matrisen til $\vec{v}$:

$$A = \frac{1}{\sin^2\theta + \cos^2\theta} \begin{pmatrix} \cos^2\theta - \sin^2\theta & 2\sin\theta\cdot\cos\theta \\ 2\sin\theta\cdot\cos\theta & \sin^2\theta - \cos^2\theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix}}_{\text{rotasjon med vinkel } 2\theta} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\text{speiling i } x\text{-aksen.}}$$

c) La $f = 90°$ rotasjon mot urviserm,

$\bar{\imath}$ = speiling om x-aksen.

Da er $f, \bar{\imath} \in S$.

f har matrisa $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,

$\bar{\imath}$ har matrisa $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

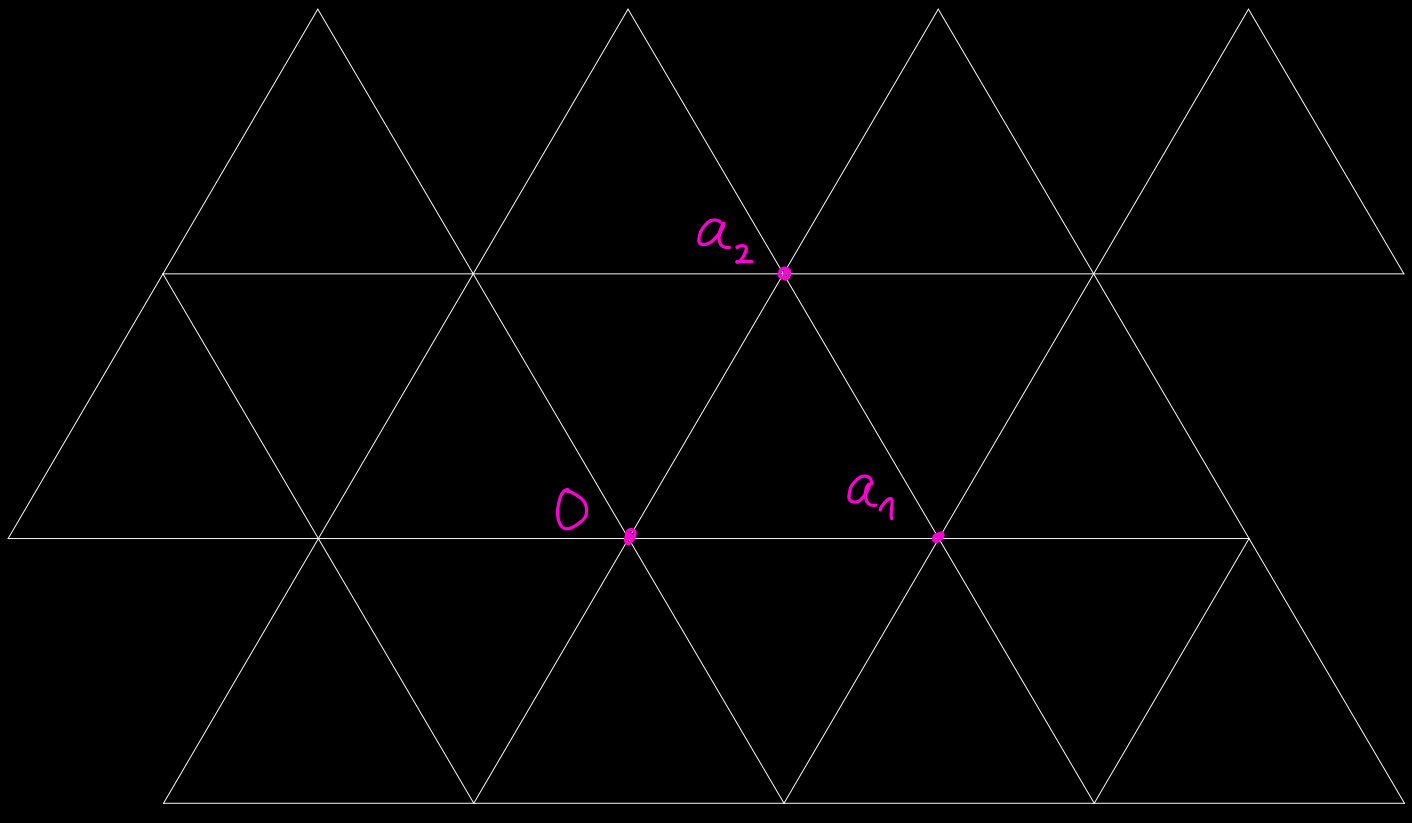
$$AB = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Da $AB \neq BA$, er $f\sigma \neq \sigma f$,

så S er ikke abelsk.

Орган 5



a) Rotasjonssymmetrier:

* Rotasjoner av orden 6 med sentrum i et hjørne
* Rotasjoner av orden 3 med sentrum i midten av en trekant
* Rotasjoner av orden 2 med sentrum på midten av en side i en trekant

Speilingssymmetrier:

* Speiling om en av linjene i mønsteret
* Speiling om en linje som går gjennom

et hjørne i en trekant og står normalt på motstående side.

b) Vi velger et koordinatsystem hvor origo er et gitterpunkt i K. Velg punktene a_1, a_2 slik at $0, a_1, a_2$ er hjørnene i en trekant i K.

For hvert gitterpunkt p i K finnes det nøyaktig én translasjonssymmetri av K som sender 0 på p. Gitterpunktene er

$$\{ma_0 + na_1 \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$

$\Rightarrow$ $\bar{T}a_0, \bar{T}a_1$ er generatorer for translasjonssymmetriene.

c) La L være linja gjennom 0 og a_1.

S = speiling i L

Da er

$$G(x) = S(x) + n \cdot a_0$$

en gliderefleksjon for alle hele tall $n \neq 0$, og G er en symmetri av K.