2.1 Grunnleggende om matriser

Husk: En reell $m \times n$ matrise A har formen

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \vdots & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Vi skriver kort $A = (a_{ij})$

Def: Summen av to $m \times n$ matriser $A = (a_{ij})$ og

$B = (b_{ij})$ er gitt ved

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}).$$

Eks:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2+4 & -1+7 \\ 3+0 & 0-2 \\ 1+3 & 4+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Eks: $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 7 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Ikke definert, da matrisene har forskjellig størrelse.

Def: Hvis $A = (a_{ij})$ er en reell $m \times n$ matrise og c et reelt tall, definerer

$$cA = (ca_{ij})$$

(skalarmultiplikasjon)

$(c = -1)$: $\quad -A := (-1) \cdot A$

Eks:

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 & 2 \cdot (-3) \\ 2 \cdot 1 & 2 \cdot 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$$

Def: 0-matrisen av storleken $m \times n$ är matrisen vars alla element är 0.

Exs: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

är 0-matrisen av storleken 2×3.

Prop: For alle reelle $m \times n$ matriser A, B, C og reelle tall c, d gjelder:

(i) $(A+B)+C = A+(B+C)$

(ii) $A+B = B+A$

(iii) $A+0 = A$

↳ null-matrisen av størrelse $m \times n$.

(iv) $A+(-A) = 0$

(v) $c(dA) = (cd)A$

(vi) $(c+d)A = cA + dA$

$c(A+B) = cA + cB$

(vii) $1 \cdot A = A$.

Beis: Omkapt. //

Husk: Produktet av en $m \times n$

matrise $A = (a_{ij})$ og en

$n \times p$ matrise $B = (b_{ik})$ er

$m \times p$ matrisen $A \cdot B = (c_{ik})$

gitt ved

$$c_{ik} = \sum_j a_{ij} b_{jk}$$

Eks:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

A B

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-3 & -2+3 \\ 2-3 & -2+3 \end{pmatrix}$$

$$B \qquad A \qquad = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Altså: $A \cdot B = 0$,

$$B \cdot A \neq 0$$

Poop: For alle reelle matriser A, B, C og reelle tall d gjelder:

(i) $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$

så lenge alle produktene er vel-definert, dvs. hvis

A er $m \times n$ matrise.

B " $n \times p$ "

C " $p \times r$ ".

(ii) $(A+B)\cdot C = A\cdot C + B\cdot C$

$A\cdot(B+C) = A\cdot B + A\cdot C$

så længe alle summer og

produkter er defineret.

(iii) $(dA)\cdot B = A\cdot(dB)$

$= d(A\cdot B)$

Bevis af (ii): La

$A=(a_{ij})$, $B=(b_{jk})$, $C=(c_{kl})$.

$$\left[(A \cdot B) \cdot C\right]_{il} = \sum_k (A \cdot B)_{ik} \cdot C_{kl}$$

$$= \sum_k \left(\sum_j a_{ij} b_{jk} \right) C_{kl}$$

$$= \sum_{jk} \left(a_{ij} b_{jk} \right) C_{kl}$$

$$= \sum_{jk} a_{ij} \left(b_{jk} C_{kl} \right)$$

$$\vdots$$

$$= \left[A \cdot (B \cdot C) \right]_{il} \quad //$$

2.2 Kvadratiske matricer

Def: Identitetsmatrisen I_n er defineret ved:

$$I_1 = (1)$$

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{I}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Hvis $\underline{I}_n = (a_{ij})$ er

$$a_{ij} = 0 \quad \text{for } i \neq j$$

$$a_{ii} = 1 \quad \text{for alle } i.$$

Ofte skriver man bare

$$\underline{I} = \underline{I}_n.$$

Def: **Huvuddiagonalen** i en $n \times n$ matris $A = (a_{ij})$ är elementen

$$a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}.$$

Exempel:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 7 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Huvuddiagonalen.

Observasjon:

(i) $A \cdot I_n = A$ for enhver $m \times n$ matrise A

(ii) $I_m \cdot A = A$ for enhver $n \times p$ matrise A.

Eks:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$: øvre triangulær

↳ alt under hoveddiag. er 0.

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 7 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$: nedre triangulär.

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$; diagonal.

Def: En $n \times n$ matris $A = (a_{ij})$ kallas

* <u>övre triangulär</u>, därsom alla element under

hoveddiagonalen er 0,

dvs. $a_{ij} = 0$ for $i > j$.

* nedre triangulær dersom alle elementene over hoveddiagonalen er 0,

dvs. $a_{ij} = 0$ for $i < j$.

* diagonal, dersom alle elementene utenfor hoveddiagonalen

... 0 ... dvs. $a_{ij} = 0$ för $i \neq j$.

Def: En $n \times n$ matris A kallas inverbar om det finns en $n \times n$ matris B så att

$$A \cdot B = I_n = B \cdot A$$

Sats: Om A är inverbar så är

$$A \cdot B = I_n \Rightarrow B \cdot A = I_n.$$

I så fall kaller B den

<u>inverse</u> matrisen til A

og man skriver $B = A^{-1}$.

<u>Lemma</u> For enhver invertibel

matrise A gjelder:

(i) Den inverse matrisen er

entydig bestemt av A.

(ii) $(A^{-1})^{-1} = A$.

Bevis: Lad A have to inverser B og C, altså

$$A \cdot B = I = B \cdot A$$

$$A \cdot C = I = C \cdot A$$

Da er

$$C = C \cdot I = C \cdot (A \cdot B)$$

$$= (C \cdot A) \cdot B$$

$$= I \cdot B = B,$$

altså er $B = C$.

(ii) La $B = A^{-1}$. Da er

$$A \cdot B = I = B \cdot A,$$

så $(A^{-1})^{-1} = B^{-1} = A$. //

Eks: Hvis a, b, c, d er

reelle tall, har vi

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad-bc & -ac+ca \\ bd-db & -bc+da \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix}$$

$$= (ad-bc) \cdot I_2$$

Hvis $ad-bc \neq 0$, er derfor

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$$

Hvis $ad = bc$, er $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$

<u>ikke</u> invertibel.

Def: $ad-bc$ heißen <u>Determinanten</u>

der Matrix $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$.

Eks:

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax & 0 & 0 \\ 0 & by & 0 \\ 0 & 0 & cz \end{pmatrix}$$

Hvis $a, b, c \neq 0$, er derfor

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & b^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & c^{-1} \end{pmatrix}$$

Minn: Hvis x, y er reelle tall,

$x, y \neq 0$, så er

$$\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{xy}$$

$$x^{-1} = \frac{1}{x}.$$

$$\Rightarrow (xy)^{-1} = x^{-1} \cdot y^{-1}$$

Lemma Hvis A, B er

inverterbare $n \times n$ matriser, så

er $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

Merk: Man skriver ikke $\frac{1}{A}$.

Bevis: $A \cdot B \cdot B^{-1} \cdot A^{-1}$

$B \cdot B^{-1} = I$

$= (A \cdot I) A^{-1} = A \cdot A^{-1}$

$= I$

$\Rightarrow (A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$ //

Husk:

transponen = bytte om rader og søyler.

Eks: $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Def: En kvadratisk matrise $A = (a_{ij})$ kalles symmetrisk dersom $A^T = A$, dvs.

$$a_{ij} = a_{ji} \quad \text{for alle } i, j.$$

Lemma For alle reelle matriser A, B og reelle tall c gjelder:

(i) $(cA)^T = c \cdot A^T$

(ii) $(A+B)^T = A^T + B^T$

dersom A og B har samme størrelse

(iii) $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

når $A \cdot B$ er definert.

(iv) $(A^T)^T = A$

Bevis: Rett frem $\square$.

Observasjon: Hvis

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$$

så er

$$\underbrace{v^T \cdot w}_{\text{matriseprodukt}} = \underbrace{v \cdot w}_{\text{skalarprodukt}}$$