# Prøveeksamensett nr. 2 (fortsatt)

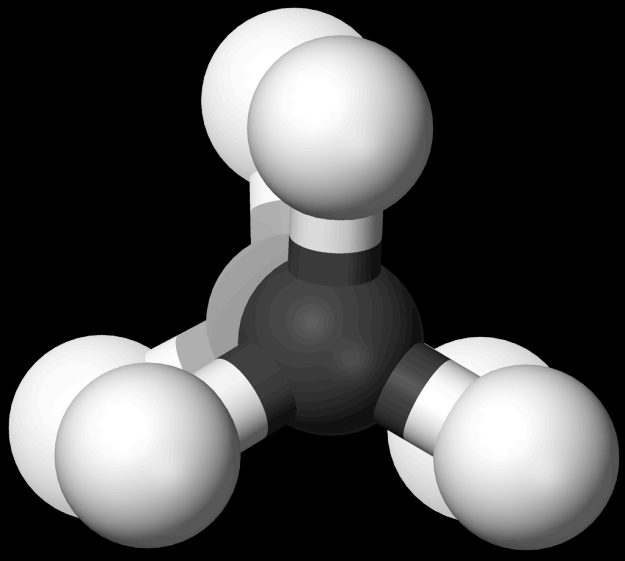
## Oppgave 6

Vi velger

z-aksen = aksen som går gjennom de to karbonatomene.

origo = midtpunktet mellom de to karbonatomene.

(i)



"Eclipsed" etan har symmetrigruppe

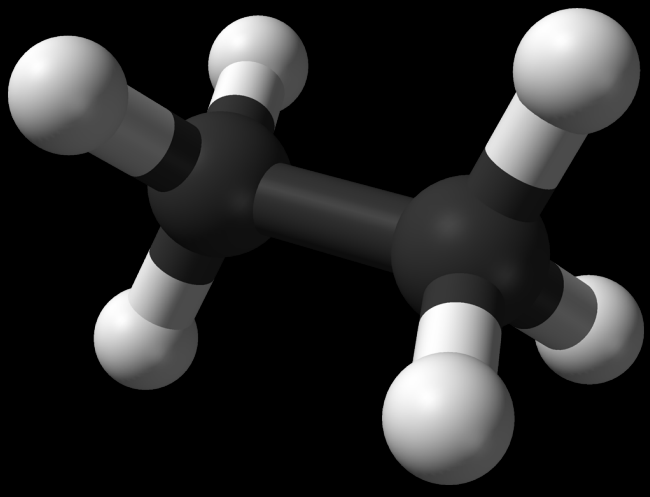
som pyramiden over en likesidet trekant, altså

$$Sym_0(M) = D_3.$$

I tillegg har $M$ en speilingssymmetri i xy-planet, altså

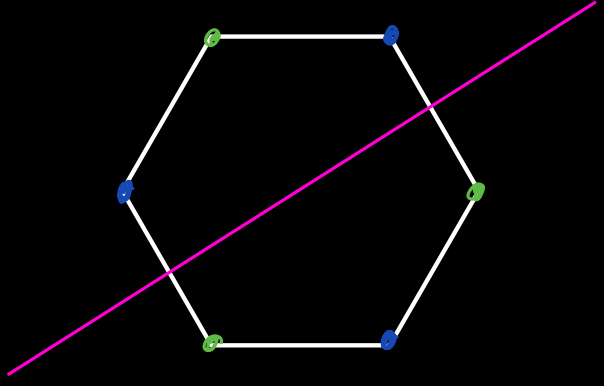
$$Sym(M) = D_{3h}$$ (kjemikernotasjon)

(ii)



"Staggered" etan:

Vi projiserer hydrogenatomene med i xy-planet og får et regulær 6-kantet polygon:



De orienteringsbevarende symmetriene

er gjennom av

* en rotasjon om z-aksen med vinkel $\frac{2\pi}{3}$

* en rotasjon om den rette linja i

xy-planet med vinkel $\pi$.

Dette gir $Sym_+(M) = D_3$.

I tillegg har M en rotasjonsspeiling

om z-aksen med vinkel $\frac{\pi}{3}$, altså

$Sym(M) = D_{3d}$ (kjemikernotasjon)

# Prøveeksamensrett nr. 3

**Oppgave 1**

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

a) $$A^T \cdot A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = \underline{I}.$$

b) $$\det(A) = \frac{1}{27}\left( (-1)\cdot 3 - 2\cdot 6 + 2\cdot(-6) \right)$$

$$= \frac{1}{27}\left( -3 - 12 - 12 \right) = -1$$

Da $A$ ikke er symmetrisk, representerer

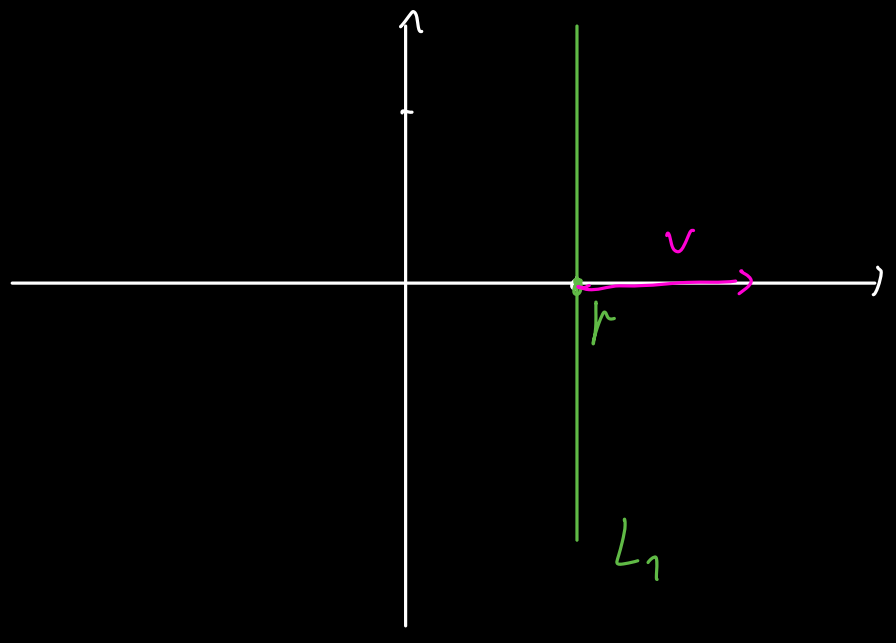
A en rotasjonsspeiling, og 1 er ikke noen egenverdi for A.

c) Fordi A er ortogonal, er $\pm 1$ de eneste mulige reelle egenverdiene.

$-1 = \det(A)$ er en egenverdi.

1 er ikke noen egenverdi.

Oppgave 2 a) $L_1$ = linja $x = 1$.




$$p = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$A$ = Householder-matrisen $Q_v$

$$= \frac{1}{\|v\|^2} \begin{pmatrix} v_2^2 - v_1^2 & -2v_1v_2 \\ -2v_1v_2 & v_1^2 - v_2^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S_1(x) = p + A(x-p)$$

$$= Ax + (I-A)p$$

$$I - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$b = (I-A)p = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow S_1(x) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

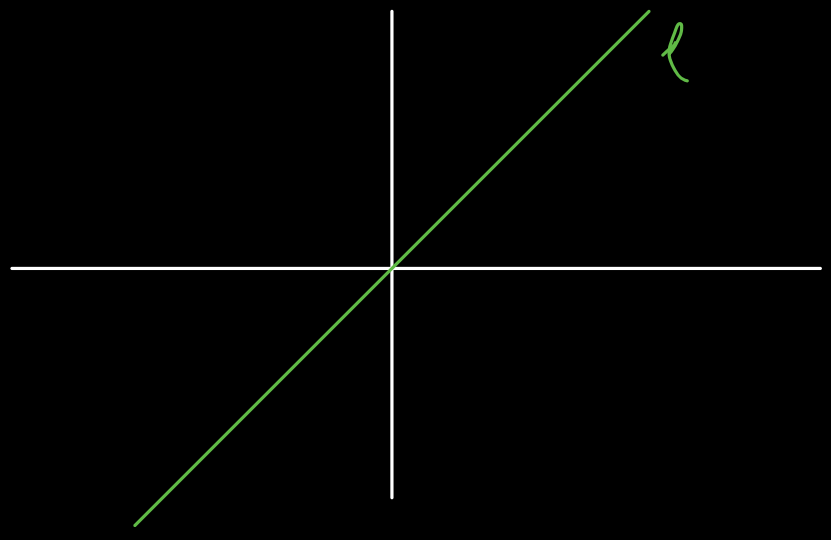
b) $S_1 m \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = S_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$S_1 m \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = S_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$S_1 m \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = S_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

c) $S_1 m(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \vec{x}$, altså

$S_2 = S_1 m$ = speglingen i linjen $x = y$.




Uppgift 3

a) La M vara en ortogonal matris.

Då är

$$M^2 = I \Leftrightarrow M^2 = M^T M \Leftrightarrow M = M^T$$

b) $Q_v = I - \frac{2}{\|v\|^2} v v^T$

j'te søyle i $vv^T = v_j \cdot v$

For $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ blir $vv^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$$Q_v = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$Q_v^2 = I$: Vist i forelesningen.

c) $\chi_{Q_v}(\lambda) = \det(Q_v - \lambda I)$

$$= \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^3 \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 1 & 0 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$= -\left[ \lambda^2(\lambda-1) - (\lambda-1) \right]$$

$$= (\lambda-1)(1-\lambda^2)$$

$$= -(\lambda+1)(\lambda-1)^2$$

$\Rightarrow$ $Q_v$ har egenverdier $\pm 1$.

d) Vist i forelesningen.

Örnek 4 $B = \{\cos^2 x, \sin^2 x, \cos x \cdot \sin x\}$

a)

$D(\cos^2 x) = -2\cos x \cdot \sin x$

$D(\sin^2 x) = \cos x \cdot \sin x$

$D(\cos x \cdot \sin x) = -\sin^2 x - \cos^2 x$

b) D has matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$D^2$ has matrix

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$D^2(\cos x \cdot \sin x) = -4 \cos x \cdot \sin x$$

$$D^{2n}(\cos x \cdot \sin x) = (-4)^n \cos x \cdot \sin x$$

$$D^{2n+1}(\cos x \cdot \sin x) = (-4)^n (\cos^2 x - \sin^2 x)$$

$\Rightarrow D^k \neq \mathrm{Id}$ for all $k \geq 1$

$\Rightarrow D$ has unendlich ordnung.

c) $f(x) = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$

$g(x) = \cos x \cdot \sin x = \frac{1}{2} \sin 2x.$

$$\langle f(x), g(x) \rangle = f(0)\cdot g(0) + f\left(\frac{\pi}{6}\right) g\left(\frac{\pi}{6}\right) + f\left(\frac{\pi}{3}\right) g\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= 1 \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= 0.$$

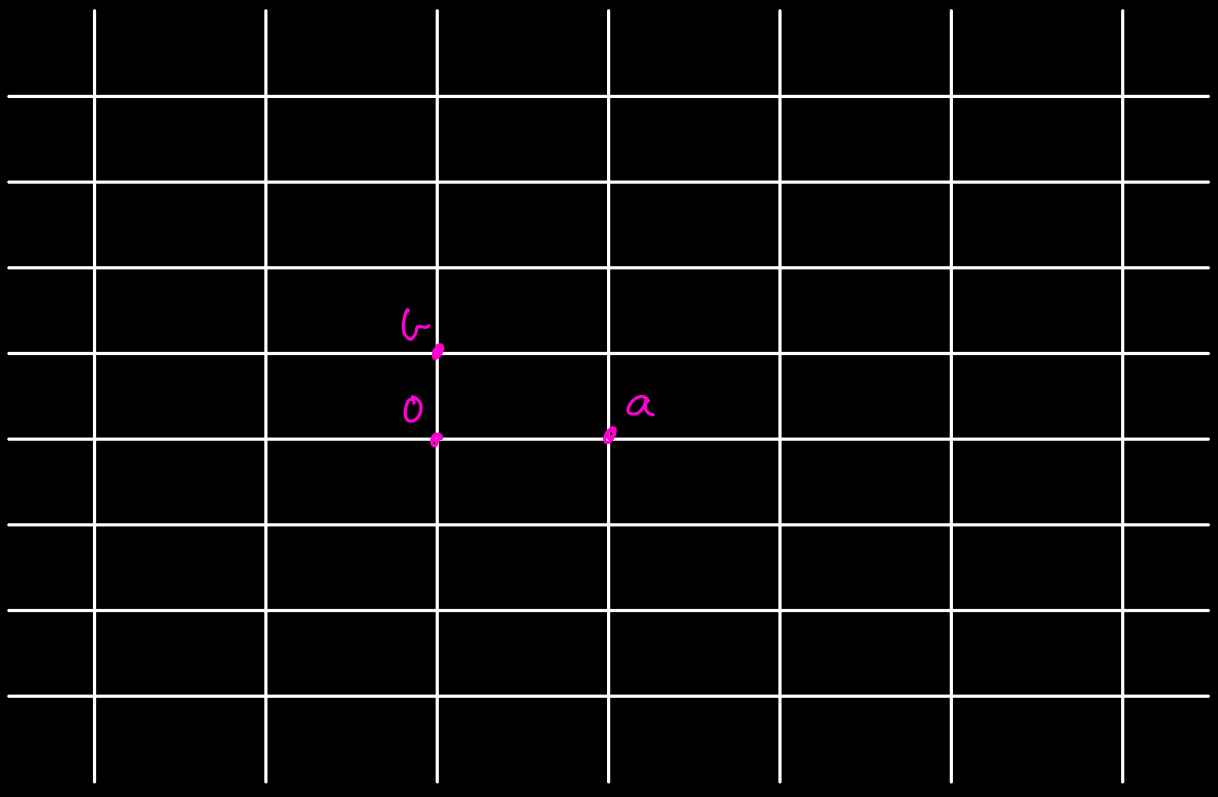
d) $\cos^2 0 = 1, \quad \cos^2 \frac{\pi}{6} = \frac{3}{4}, \quad \sin^2 \frac{\pi}{6} = \frac{1}{4}$

$$\langle \cos^2 x, \cos^2 x \rangle = 1^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2$$

$$= 1 + \frac{10}{16} = 1 + \frac{5}{8} = \frac{13}{8}$$

$$\| \cos^2 x \| = \sqrt{\frac{13}{8}} = \underline{\underline{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{13}{2}}}}.$$

# Opgave 5



a) Rotasjonssymmetries:

180° rotasjon om et hjørne, midtpunktet på en side, eller midtpunktet i en firkant.

Speilingssymmetries:

Speiling i ei linje i K

eller i ei linje som er parallell med ei linje i K og som halverer de firkantene den speiler.

b) Generatorer for translasjonssymmetriene:

$\overline{Ta}$, $\overline{Tb}$, hvor a,b er som på figuren.

c) Vi velger en horisontal linje L i

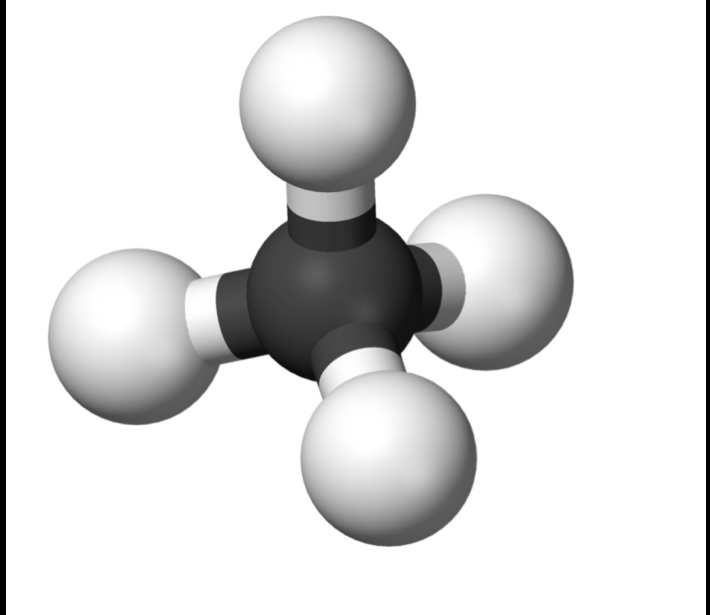
midtstrek.

S = speiling i L

G(x) = S(x) + a : gliderefleksjon

og symmetri av K.

## Oppgave 6



Metanmolekylet $CH_4$ har samme symmetrigruppe som et tetraeder, altså

$$Sym_0(M) = T \quad \text{(tetraedergruppen)}.$$

Molekylet har også orienteringsreverserende symmetrier, f.eks. speilingen i et plan som går gjennom C-atomet og to av H-atomene.