Prop: Hvis A er en $m \times n$ matrise, så er

$$Av \cdot w = v \cdot A^T w$$ (skalarprodukter)

for alle søylevektorer

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix}.$$

Bevis: $\underbrace{Av \cdot w}_{\text{skalarprodukt}} = \underbrace{(Av)^T \cdot w}_{\text{matriseprod.}}$

$$= (v^T A^T) w = v^T (A^T w)$$

$$= v \cdot A^T w. \quad //$$

Def: En kvadratisk matris A kallas ortogonal, dersom

$$A^T \cdot A = I.$$

Prop: Låt A vara en kvadratisk matris med egenvärden $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Då är följande ekvivalent:

(i) A er ortogonal

(ii) A er invertibel og

$$A^{-1} = A^T$$

(iii) $$s_i \cdot s_j = \begin{cases} 0 \text{ hvis } i \neq j \\ 1 \text{ hvis } i = j \end{cases}$$

Bevis: (i) $\Leftrightarrow$ (ii):

A ortogonal $\Leftrightarrow$ $A^T \cdot A = I$

$\Leftrightarrow$ $A^T \cdot \underbrace{A \cdot A^{-1}}_{I} = A^{-1}$

$\Leftrightarrow \quad A^T = A^{-1}.$

$(i) \Leftrightarrow (iii)$: $\quad A^T \cdot A = (c_{ij})$

c_{ij}

$= (i\text{-te rad av } A^T) \cdot (j\text{-te søyle av } A)$

$= (i\text{-te søyle av } A) \cdot (j\text{-te søyle av } A)$

$= s_i \cdot s_j$

$A^T \cdot A = I \quad \Leftrightarrow \quad s_i \cdot s_j = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j. \end{cases}$

//

Observasjon

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$A \quad e_1 \quad =$ første søyle av A

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

$A \quad e_2 \quad =$ andre søyle av A

Generelt: Hvis $A = (a_{ij})$

er en $m \times n$ matrise og

$$e_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$ ← 1 på j-te plats, 0 ellers

så är Ae_j = j-te spalten i A.

$$\Rightarrow \underbrace{e_i \cdot Ae_j}_{\text{skalärprodukt}} = a_{ij}$$

Ex:
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e_2 A e_1

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$= 0 \cdot a + 1 \cdot b$$

$$= b = a_{21}$$

Prop: En $n \times n$ matris A är ortogonal hvis og kun hvis

$$Av \cdot Aw = v \cdot w$$

for alle n-vektorer v, w.

Bevis: Vi opfatter v, w som søjlevektorer.

(i) Hvis A er ortogonal, har vi

$$Av \cdot Aw = v \cdot \underbrace{A^T A}_{I} w$$

$$= v \cdot w$$

(ii) Anta $Av \cdot Aw = v \cdot w$ alltid holder. Vi velger

$v = e_i, \quad w = e_j$:

$$(A^T A)_{ij} = e_i \cdot (A^T A e_j)$$

$$= Ae_i \cdot Ae_j$$

$$= e_i \cdot e_j$$

$$= \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$$ //.

Eksempler på ortogonale matriser.

Hvis Q er et reelt tall, så er

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$ orthogonal.

For $\theta = \frac{\pi}{2}$: $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

For $\theta = \pi$: $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$\underline{n=3}$: $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Def: **Normen** til en vektor $v = (v_1, v_2, \cdots, v_n)$ er definert ved

$$\|v\| := \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2}$$

Merk: $\|v\|^2 = v \cdot v$

Prop: Hvis A er en ortogonal $n \times n$ matrise, så er

$$\|Av\| = \|v\|$$

für alle v.

Beweis:

$$\|Av\|^2 = Av \cdot Av$$

$$= v \cdot v$$

$$= \|v\|^2$$

$$\Rightarrow \|Av\| = \|v\| \quad //.$$

Def: Hvis $0 \neq v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$

så kalles $n \times n$ matrisen

$$Q_v = \underline{I} - \frac{2}{\|v\|^2} \cdot vv^T$$

en Householder-transformasjon

Eks: $n = 2$

$$vv^T = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \cdot (v_1, v_2)$$

2×1 $\quad$ 1×2

$$= \begin{pmatrix} v_1^2 & v_1 v_2 \\ v_2 v_1 & v_2^2 \end{pmatrix}$$

Generelt: $(vv^T)_{ij} = v_i v_j$

Prop: Enhver Householder-transformasjon er symmetrisk og ortogonal.

Bevis: Symmetrisk:

$$(vv^T)^T = (v^T)^T \cdot v^T$$

$$= vv^T$$

$\Rightarrow vv^T$ symmetrisch.

$$(Q_v)^T = I^T - \frac{2}{\|v\|^2} \cdot (vv^T)^T$$

$$= I - \frac{2}{\|v\|^2} \cdot vv^T$$

$$= Q_v$$

$\Rightarrow Q_v$ symmetrisch.

Orthogonal:

$$Q_v^T \cdot Q_v = Q_v^2$$

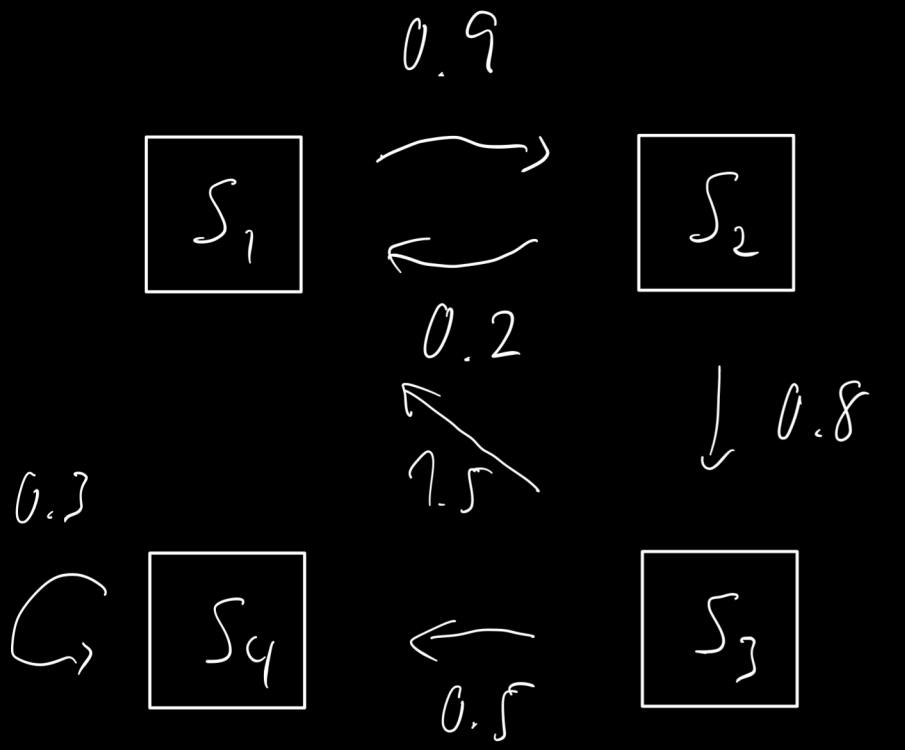
$$= \left(\underline{\underline{I}} - \frac{2}{\|v\|^2} vv^T\right) \cdot \left(\underline{\underline{I}} - \frac{2}{\|v\|^2} vv^T\right)$$

$$= \underline{\underline{I}} - \frac{4}{\|v\|^2} vv^T + \frac{4}{\|v\|^4} vv^T vv^T$$

$$vv^T = \|v\|^2$$

$$= \underline{\underline{I}} \quad //$$

Inverse matriser og dynamiske systemer



S_1 = nyfødte

S_2 = unge

S_3 = voksne

S_4 = gamle

Övergångsmatris:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0.2 & 1.5 & 0 \\ 0.9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.3 \end{pmatrix}$$

$$V_n = \begin{pmatrix} w_n \\ x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$$: Tillståndsvektorn vid år n

$$V_{n+1} = A \cdot V_n$$

Den inversa matrisen A^{-1} beskriver

dun baklengse utviklingen:

$$V_n = A^{-1}AV_n = A^{-1}V_{n+1}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.3 & 0 \\ 0.67 & 0 & -0.17 & 0 \\ -1.1 & 0 & 0.28 & 1.3 \end{pmatrix}$$

