Klassifikasjon av punktsymmetrier

Teorem La $m : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ være en ikke-triviell punktsymmetri med fikspunktmengde

$$\mathcal{F}_m = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid m(x) = x\}.$$

(i) Hvis $\mathcal{F}_m$ er en linje L, så er m en rotasjon om L.

(ii) Hvis $\mathcal{F}_m$ er et plan P, så er m speilingen i P.

(iii) Hvis $\mathcal{F}_m = \{0\}$, så er m en rotasjonssymmetri.

<u>Bevis</u> La $m(x) = Ax$, hvor A er en ortogonal 3×3 matrise, $A \neq I$. La

$$\varepsilon = \det(A) = \pm 1.$$

Da er ε en egenverdi for A (som vist tidligere), så det finns en $w \in \mathbb{R}^3$ med $\|w\| = 1$ slik at

$$Aw = \varepsilon w.$$

Velg u, v slik at $\{u, v, w\}$

er en positiv ortonormert basis for $\mathbb{R}^3$. Siden $Aw^\perp = w^\perp$, må

$$Au = au + bv$$
$$Av = cu + dv$$

for passende reelle tall a, b, c, d. La B være matrisen til m med hensyn til basisen $\{u, v, w\}$. Da er

$$B = \begin{pmatrix} a & c & 0 \\ b & d & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}.$$

Vi danner matrisen C med søjler u, v, w. Da er C ortogonal, og

$$B = C^{-1} A C.$$

$\Rightarrow$ B er ortogonal og

$$\begin{aligned} \varepsilon(ad - bc) &= \det(B) \\ &= \det(C)^{-1} \cdot \det(A) \cdot \det(C) \\ &= \det(A) \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ $ad - bc = 1$.

$\Rightarrow \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ er en ortogonal

matrise med determinant 1,

altså en rotasjonsmatrise. Derfor

finnes det et reelt tall θ

slik at $0 \leq \theta < 2\pi$ og

$$B = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$$

(i) Hvis $\varepsilon = 1$, så er m en

rotasjon om linjen $L = \mathbb{R}w$

med vinkel θ. Siden $m \neq \mathrm{Id}$, er $\bar{F}_m = L$.

(ii) Hvis $\varepsilon = -1$ og $\theta = 0$, er

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

så m er speilingen i planet $P = W^{\perp}$, og $\bar{F}_m = P$.

(iii) Hvis $\varepsilon = -1$, $\theta \neq 0$, er

$$B = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ m er rotasjonsspeilingen om

R_θ med vinkel θ, og $\bar{F}_m = [0]$.

//

Eks: La $m(x) = Ax$, hvor

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vi har $\det(A) = 1$, så m er en rotasjon om en linje. Vi vil bestemme rotasjonsaksen og -vinkel. Vi merker oss at

$$Ai = j, \quad Aj = k, \quad Ak = i$$

$$\Rightarrow A^3 = I. \quad \text{La}$$

$$w = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Da er $\|w\| = 1$ og $Aw = w$, så m er en notasjon om lRw.

For å finne vinkelen velger vi

$$u = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Da må

$$v = w \times u = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}} \left(-i - (-2) j + (-1) k \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}} \left(-i + 2j - k \right)$$

Vi har, for paramda $\theta \in \mathbb{R}$:

$$Au = \cos\theta \cdot u + \sin\theta \cdot v$$

$$Au = \frac{1}{\sqrt{2}} A(i - k) = \frac{1}{\sqrt{2}} (j - i)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\cos\theta = Au \cdot u = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{2}$$

$$\sin\theta = Au \cdot v = \frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{3} \quad \text{modulo } 2\pi.$$

Eksempel Hva slags isometri representerer

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad ?$$

Vi bestemmer fikspunktmengden til A.

$$Av = v \iff (A - I)v = 0$$

$$A - I = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

La $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Da er

$$Av = v \iff \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

$\Leftrightarrow \quad x - 2y + z = 0$

$\Rightarrow$ F = normalplanet til $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

og m er speilingen i dette planet.

Prop: La $m_1, m_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara speglingar i två olika parallella plan P_1, P_2 hhv. Då är $m_1 \circ m_2$ en rotation om linjen $L = P_1 \cap P_2$ med rot.vinkel

$$\theta = \pm 2 \angle(P_1, P_2),$$

hvar fortegnet avhenger av

orienteringen av L.

Bevis: m_1 og m_2 bevarer orientering og holder L i ro. //

Eksempel Vi vil finne $L = P_1 \cap P_2$ når

P_1 = normalplanet til $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

P_2 = ——— 11 ——— $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Siden L står normalt på både

v_1 og v_2, må L være parallell med $v_1 \times v_2$.

$$v_1 \times v_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 2i + 2j + 2k$$

$$\Rightarrow \quad L = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Prop Enhver punktsymmetri $m: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ kan uttrykkes som et produkt av to eller tre speilinger (i plan).

Bevis:

Tilfelle 1: m orienteringsbevarende.

Da er m en rotasjon om en linje $\mathbb{R}v$.

Velg en enhetsvektor u med $u \cdot v = 0$ og la

$$v = m(u), \qquad z = u - v.$$

La m_1 være spejlingen i planet $z^\perp$. Vi viser at $m_1(v) = u$:

For enhver $x \in \mathbb{R}^3$ er

$$m_1(x) = x - \frac{2x \cdot z}{\|z\|^2} \cdot z$$

$$\|z\|^2 = \|u\|^2 - 2u \cdot v + \|v\|^2$$

$$= 2 - 2u \cdot v$$

$$= -2v \cdot z$$

$$\Rightarrow m_1(v) = v + z = u.$$

Vi betraktar nå sammensetningen

$$m_2 = m_1 \circ m.$$

Vi har

$$m_2(u) = m_1(m(u)) = m_1(v) = u,$$

$$m_2(w) = m_1(w) = w$$

$\Rightarrow$ m_2 holder planet P utspent av u, w i ∞.

Siden $m_2 \neq Id$, må m_2 være speilingen i P. Men

$$m = m_1 \circ m_1 \circ m = m_2 \circ m_2,$$

altså er m et produkt av

to speilinger.

Tilfelle 2 : m orienteringsreverserende.

La m_1 være speilingen i hvilket som helst plan. Da er $m_1 \circ m$ orienteringsbevarende, så ifølge Tilfelle 1 finn det speilinger m_2, m_3 slik at

$$m_1 \circ m = m_2 \circ m_3$$

$$\Leftrightarrow \quad m = m_1 \circ m_2 \circ m_3 \quad . \quad //.$$