6.1 Et generelt indreproduktbegrep.

Analogi til skalarprodukt i $\mathbb{R}^n$:

Hvis $f, g : [0,1) \to \mathbb{R}$:

$$\langle f, g \rangle_{L^2} = \int_0^1 f(x) g(x)\, dx.$$

Def: La V være et reelt vektorrom.

Et indreprodukt på V er en regel som for hvert par $v, w \in V$ gir et reelt tall $\langle v, w \rangle$, slik at følgende gjelder for alle

$u, v, w \in V$ og $a, b \in \mathbb{R}$:

(i) Bilineanitet:

$$\langle au + bv, w \rangle = a\langle u, w \rangle + b\langle v, w \rangle$$

$$\langle u, av + bw \rangle = a\langle u, v \rangle + b\langle u, w \rangle$$

(ii) Symmetri: $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$

(iii) Positivitet: $\langle v, v \rangle \geq 0$,
med ekte ulikhet hvis $v \neq 0$.

Def: Euklidsk rom
= reelt vektorrom med
indreprodukt.

Def: $\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$: Normen til v.

Prop (Pythagoras) Hvis $u, v \in V$,

$\langle u, v \rangle = 0$, så er

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$$

Bevis:

$$\|u + v\|^2 = \langle u + v, u + v \rangle$$

$$= \langle u, u \rangle + \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle + \langle v, v \rangle$$

$$= \|u\|^2 + \|v\|^2. \quad //$$

Teorem (Cauchy-Schwarz)

La V være et Euklidsk rom og

$u, v \in V$. Da er

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|.$$

Hvis likhet gjelder, er u og v

lineært avhengige.

Bevis: (i) Hvis $u = 0$: Trivielt.

(ii) Anta $u \neq 0$. For $t \in \mathbb{R}$ er

$$0 \leq \|tu+v\|^2 = \langle tu+v, tu+v \rangle$$

$$= t^2\|u\|^2 + 2t\langle u,v\rangle + \|v\|^2$$

$$= \left(t\|u\| + \frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|}\right)^2 - \frac{\langle u,v\rangle^2}{\|u\|^2}$$

$$+ \|v\|^2.$$

Vi setter $t = -\frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|^2}$ og får

$$0 \leq \|v\|^2 - \frac{\langle u,v\rangle^2}{\|u\|^2}$$

$$\Leftrightarrow \langle u,v\rangle^2 \leq \|u\|^2\|v\|^2$$

$$\Leftrightarrow |\langle u,v\rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|.$$

Hvis likhet gjelder, må

$tu + v = 0$, så u, v er

lineært avhengige. //

<u>Teorem</u> $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$

<u>Bevis</u>:

$$\|u+v\|^2 = \langle u+v, u+v \rangle$$

$$= \|u\|^2 + 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2$$

$$\leq \|u\|^2 + 2\|u\| \cdot \|v\| + \|v\|^2$$

$$= \left(\|u\| + \|v\| \right)^2$$

$$\Rightarrow \|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|. \quad //$$

Def For $u, v \in V$, $u, v \neq 0$

definerer vi **vinkelen** $\theta = \angle(u, v)$

ved

$$\theta = \arccos \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|},$$

dvs. θ er bestemt ved at

$$\cos\theta = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi.$$

Prop: For alle $v, w \in V$ gjelder:

(i) $\|v+w\|^2 + \|v-w\|^2 = 2\left(\|v\|^2 + \|w\|^2\right)$

(ii) $\langle v, w \rangle = \frac{1}{2}\left(\|v+w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2\right)$

Bevis (i) Vi legger sammen likningene

$$\|v+w\|^2 = \|v\|^2 + 2\langle v, w \rangle + \|w\|^2$$

$$\|v-w\|^2 = \|v\|^2 - 2\langle v, w \rangle + \|w\|^2$$

(ii) Følger av utregningen for $\|v+w\|^2$.

//

6.2 Eksempler på indreprodukt

Eks: Skalarproduktet på $\mathbb{R}^n$:

Hvis $\vec{x} = (x_1, \cdots, x_n)$

$\vec{y} = (y_1, \cdots, y_n)$

så er $\vec{x} \cdot \vec{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.

Def: $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ = vektorrommet av alle reelle $m\times n$ matriser.

Frobenius-indreprodukt på $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ er definert ved

$$\langle A, B\rangle_{m,n} = tr(A^T \cdot B)$$

for $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

Husk: For en kvadratisk matrise $C = (c_{ij})$ er

$$tr(C) = \sum_i c_{ii}$$

= summen av elementene på diagonalen.

Vi regner nå ut $\langle A, B \rangle_{m,n}$:

Hvis $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$,

er $(A^T)_{ij} = a_{ji}$

$$(A^T B)_{ik} = \sum_j a_{ji} b_{jk}$$

$$\langle A, B \rangle_{m,n} = \sum_k (A^T B)_{kk}$$

$$= \sum_{jk} a_{jk} b_{jk}$$

Hvis vi velger en rekkefølge på

elementum i en $m \times n$ matrise, f. eks.

$$a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}, a_{21}, \dots, a_{2n}, \dots a_{m1} \dots a_{mn},$$

kan vi identifisere

$$M_{m\times n}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{mn}$$

som reelle vektorrom, og $(\cdot,\cdot)_{m,n}$ svarer til skalarproduktet på $\mathbb{R}^{mn}$.

Eks $(m = n = 2)$:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

er en ortonormert basis for $M_{2\times n}(\mathbb{R})$ som svarer til standardbasis for $\mathbb{R}^4$.

Def: For $a < b$ definerer vi $C([a,b]) =$ vektorrommet av alle kontinuerlige funksjoner $[a,b] \to \mathbb{R}$.

Prop: $\langle f, g \rangle_{L^2} = \int_a^b f(x) g(x) \, dx$

er et indreprodukt på $C([a,b])$.

Bevis: Bilinearitet, symmetri: Opplagt.

Positivitet: La $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ være kontinuerlig.

$$\langle f, f \rangle_{L^2} = \int_a^b f(x)^2 \, dx \geq 0$$

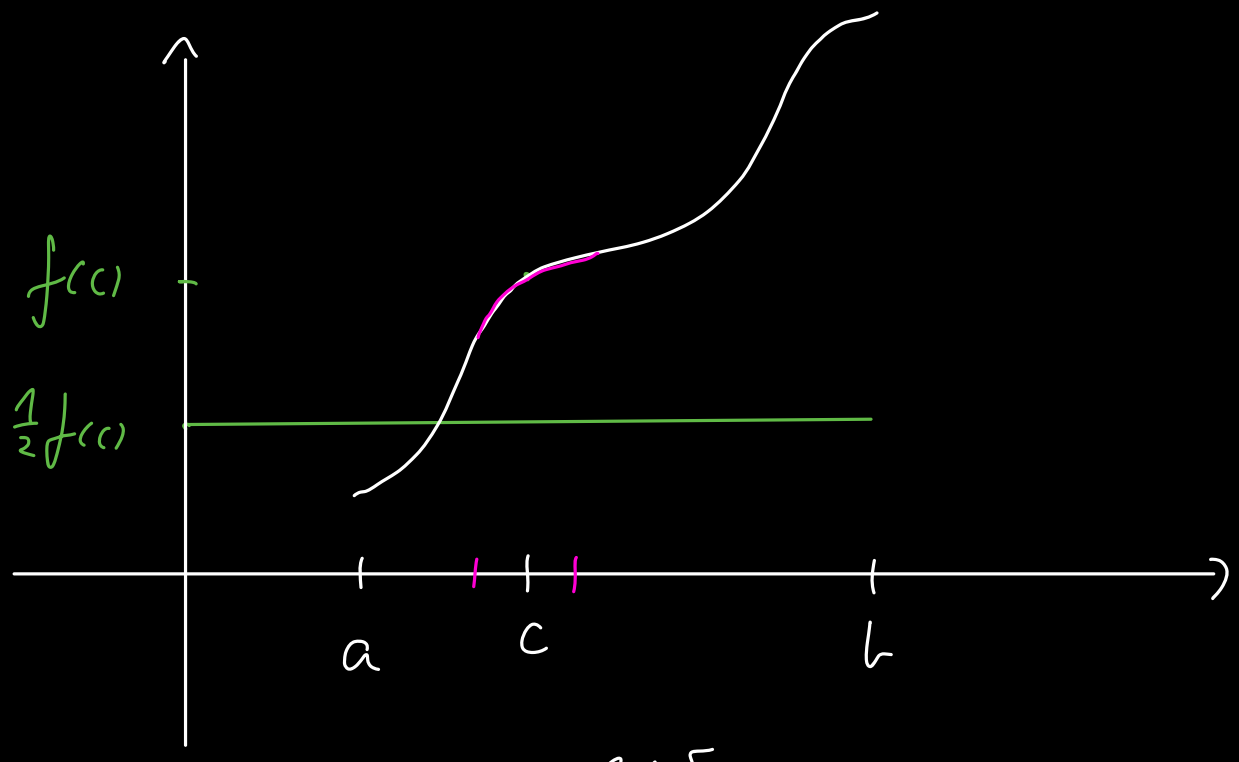
Anta $f \neq 0$, dvs. det finns en $c \in [a,b]$ slik at $f(c) \neq 0$.

Anta først $a < c < b$.

Sidan f är kontinuerlig, finns det ett litet $\delta > 0$ sådant att

$$|f(x)| > \frac{1}{2}|f(c)|$$

när $|x - c| < \delta$.



$$\int_a^b f(x)^2\,dx \geq \int_{c-\delta}^{c+\delta} f(x)^2\,dx$$

$$\geq \int_{c-\delta}^{c+\delta} \frac{1}{4} |f(c)|^2 \, dx$$

$$= \frac{\delta}{2} |f(c)|^2$$

$$> 0.$$

Tillvarmda fungerar bara $c = a$ eller $c = b$. //