Teorem De endelige undergruppene av $SO(3)$ er opp til isomorfi som følger:

(i) De sykliske gruppene C_n, $n \geq 1$.

(ii) Diedergruppene D_n, $n \geq 2$.

(iii) Tetraedergruppa T

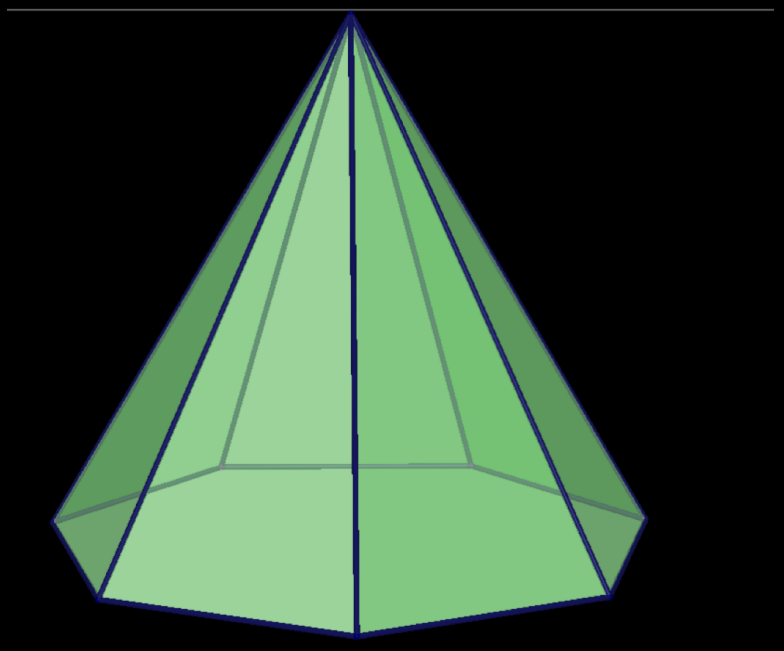
(iv) Oktaedergruppa O

(v) Ikosaedergruppa I.

Bevis: Utelatt. //

Beskrivelse av gruppene

(1)



K_n = pyramide (eller kjegle) over et regulært n-kantet polygon i xy-planet, og med øvre hjørne

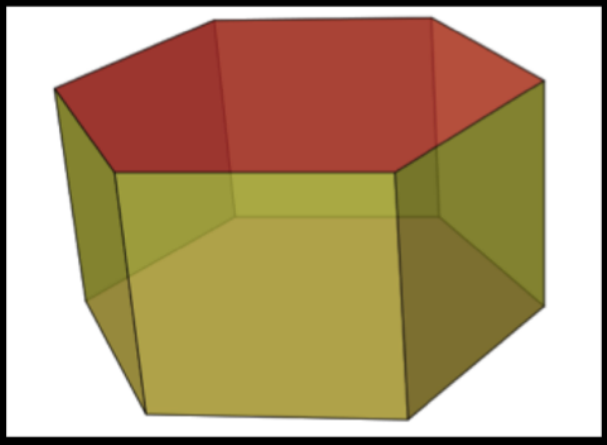
(langst opp) på z-aksen.

$$Sym_0(K_n) \cong$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi k}{n} & -\sin\frac{2\pi k}{n} & 0 \\ \sin\frac{2\pi k}{n} & \cos\frac{2\pi k}{n} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; k = 0, \cdots, n-1 \right\}$$

Dette er en syklisk gruppe som vi kan identifisere med C_n.

(2)



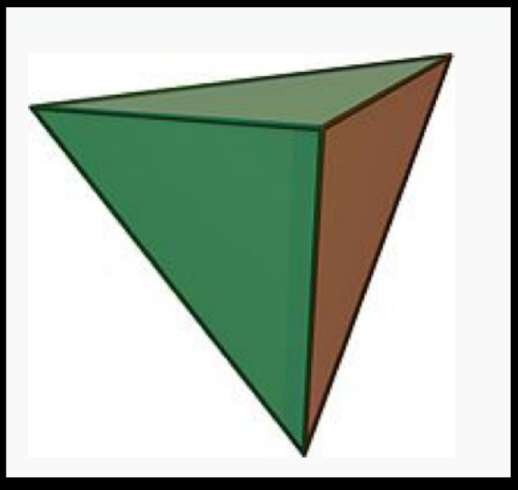
P_n = prisme over regulært n-kantet polygon L_n i xy-planet og med sentrum i origo.

$$Sym_0(P_n) \xrightarrow{\sim} Sym(L_n) = D_n.$$

De orienteringsbevarende isometriene av L_n svarer til rotasjoner av P_n

om en akse i xy-planet gjennom 0 og med vinkel π.

(3)



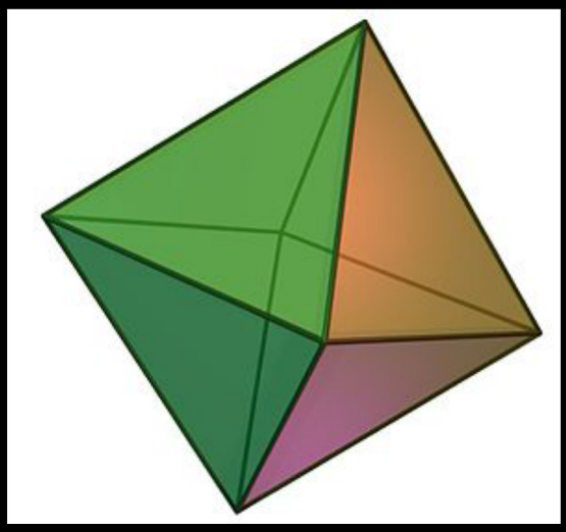
Δ_4 = regulært tetraeder

alle sidene er regulære polygoner.

4 sider, 6 kanter, 4 hjørner.

Tetraedergruppa T = $Sym_0(\Delta_4)$.

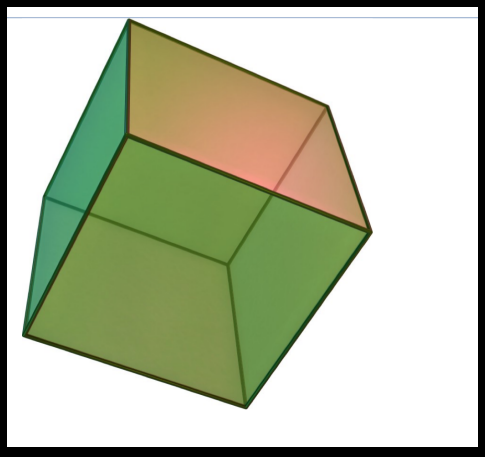
(4)



Δ_8 = regulært oktaeder

8 sider, 12 kanter, 6 hjørner.

Oktaedergruppa $O = Sym_0(\Delta_8)$.



$\square_6$ = regulært heksaeder (= kube)

6 sider, 12 kanter, 8 hjørner.

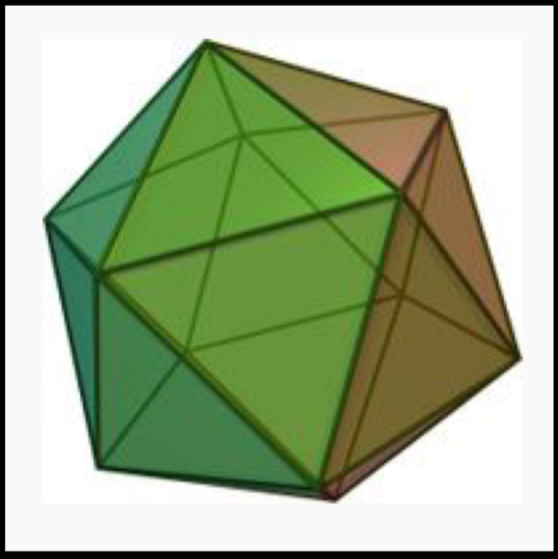
$\triangle_8$ og $\square_6$ er <u>duale</u> polyedre, dvs.

midtpunkterne i sidene til $\triangle_8$

danner hjørnerne i $\square_6$, og omvendt.

$\Rightarrow Sym_0(\triangle_8) = Sym_0(\square_6)$.

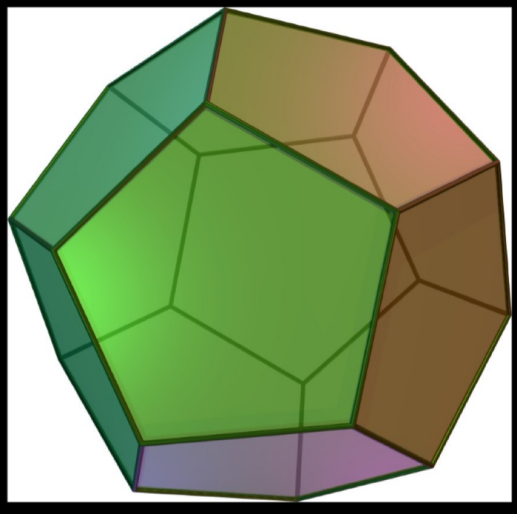
(5)



Δ_{20} = regulært ikosaeder

20 sider, 30 kanter, 12 hjørner.

Ikosaedergruppa $\mathbb{I} = Sym_0(\Delta_{20})$



$\bigcirc_{12}$ = regulärt dodekaeder.

12 sidor,

$\frac{12 \cdot 5}{2} = 30$ kanter.

$\frac{12 \cdot 5}{3} = 20$ hörnen.

Δ_{20} och $\bigcirc_{12}$ är duala polyedrar och har därför samma symmetrigrupper.

Eulers polyedersetning

Hvis et regulært polyeder har S sider, K kanter, H hjørner, så er

$$H - K + S = 2.$$

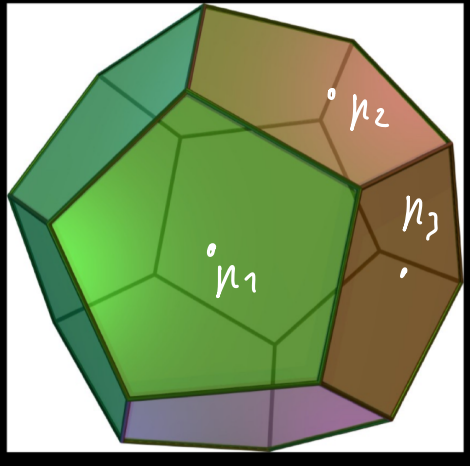
Eks: Dodekaeder:

$$H - K + S = 20 - 30 + 12 = 2.$$

Teorem Hvis et regulært polyeder P har n k-kantede sider, så er

$$|\mathrm{Sym}_0(P)| = nk.$$

Bevis: La $p_1, \dots, p_n$ være midtpunktene i sidene til P.



Hver symmetri m av P gir opphav til en permutasjon av sidene til P og dermed av mengden $\{p_1, \cdots, p_n\}$. Idéen er nå å gruppere symmetriene etter hvor de sender midtpunktet p_1. La

$$f : Sym_0(P) \to \{p_1, \cdots, p_n\}$$

$$f(m) = m(p_1)$$

og

$$T = \{ m \in Sym_0(P) \mid m(p_1) = p_1 \}.$$

: undergruppe av $Sym_0(P)$.

Hvert element i T er en rotasjon om aksen $\mathbb{R}p_1$ med rotasjonsvinkel $2\pi r/k$, hvor $r = 0, \cdots, k-1$.

$\Rightarrow |\Gamma| = k.$

For $i = 1, \dots, n$ finn det en symmetri $m \in Sym_0(P)$ slik at $m(p_1) = p_i$.

Hvis $\hat{m}$ er en annen slik symmetri, altså

$$\hat{m}(p_1) = p_i,$$

så er

$$m^{-1}\hat{m}(p_1) = p_1$$

$$\Leftrightarrow m^{-1}\hat{m} \in \Gamma \Leftrightarrow \hat{m} \in m\Gamma.$$

Dette viser at

$$f^{-1}(p_i) = m\Gamma.$$

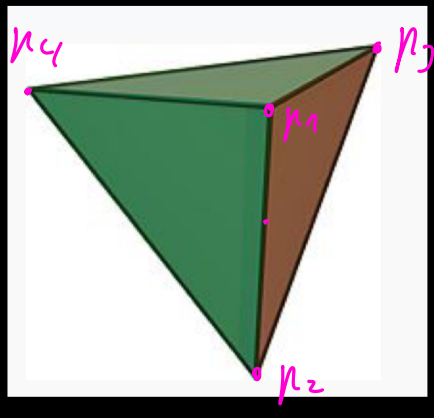
$$\Rightarrow |f^{-1}(p_i)| = |\Gamma| = k.$$

Men

$$\mathrm{Sym}_0(P) = \bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(p_i)$$

$$\Rightarrow |\mathrm{Sym}_0(P)| = n \cdot k. \quad //.$$

<u>Teorem</u> Tetraedergruppa T är isomorf med den alternerande gruppen A_4.



<u>Bevis</u> Vi kan anta S_4 har samma i origo. La $p_1, \dots, p_4$ vara hjörnena i

tetraedret Δ_4. Enhver symmetri av Δ_4 gir en permutasjon av hjørnene, altså et element av den symmetriske gruppa S_4. Dette definerer en gruppehomomorfi

$$\varphi : \mathrm{Sym}(\Delta_4) \to S_4.$$

Siden hjørnene utspenner hele $\mathbb{R}^3$, er φ injektiv. Vi vil nå vise at φ er surjektiv. La π være planet som går gjennom punktene $0, v_3, v_4$, og la $m : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ være speilingen i π. Da er m en symmetri av Δ_4 som

bytter om n_1 og n_2 og holder n_3 og n_4 i ro.

$= 1$ $\varphi(m_1$ er transposisjonen som bytter om 1 og 2.

Det samme argumentet viser at enhver transposisjon i S_4 er bildet av en speiling i $Sym(\Delta_4)$.

Ethvert element $\sigma \in S_4$ er et produkt av transposisjoner, altså finnes det speilinger $m_1, \dots, m_r \in Sym(\Delta_4)$ slik at

$$\sigma = \varphi(m_1) \cdots \varphi(m_r)$$

$$= \varphi(m_1 \cdots m_r).$$

La $m = m_1 \cdots m_r$. Da gjelder:

m orienteringbevarende

$\Leftrightarrow$ r jevn $\Leftrightarrow$ σ jevn.

Dette viser at $\varphi(\Pi) = A_4$, altså er avbildningen

$$\Pi \to A_4, \quad f \mapsto \varphi(f)$$

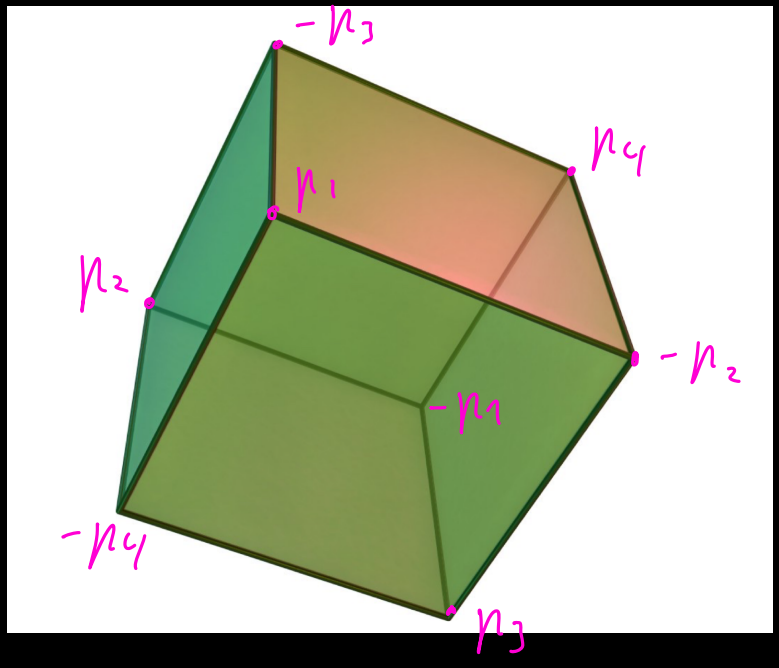
en isomorfi. //

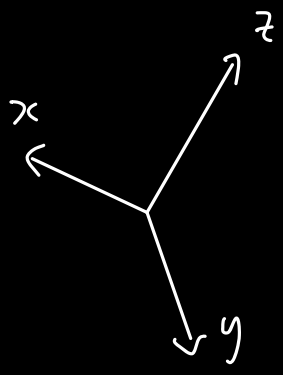
Vi sjekker: $|\Pi| = 3 \cdot 4 = 12$

$$|A_4| = \frac{1}{2} 4! = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 12.$$

Teorem Oktaedergruppa O er isomorf med den symmetriske gruppa S_4.

$\square_6$





Bevis Vi bruker at $O = \mathrm{Sym}_+(\square_6)$.

La

$$n_1 = (1,1,1), \quad n_2 = (1,-1,-1),$$

$$n_3 = (-1,1,-1), \quad n_4 = (-1,-1,1),$$

og la $\square_6$ være kuben med hjørner $\pm n_i$, $i = 1,\dots,4$. Enhver symmetri av

Kuben vil permutere de fire diagonalene $L_1, \dots, L_4$, hvor

L_i = linjen gjennom p_i og $-p_i$.

Dette gir en gruppehomomorfi

$$\varphi : O = Sym_0(D_6) \to S_4.$$

Vi vil nå vise at φ er surjektiv.

La $m : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ være gitt ved $m(x) = Ax$,

hvor

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Da er m en orienteringsbevarende

symmetri av kuben, og

$m(p_1) = -p_2$, $m(p_2) = -p_1$,

$m(p_3) = -p_3$, $m(p_4) = -p_4$.

$\Rightarrow$ m bytter om diagonalene L_1 og L_2 og holder L_3 og L_4 i ro.

Én symmetrioperasjon viser at enhver transposisjon i S_4 ligger i bildet til φ. Siden S_4 er generert av transposisjoner, er φ surjektiv. Men

$$|D| = 6 \cdot 4 = 24 = 4! = |S_4|,$$

så φ er en isomorfi. //