Mer om indreprodukt

Vi vil vise en sammenheng mellom indreprodukt på $\mathbb{R}^n$ og symmetriske $n \times n$ matriser. Først litt forberedelse.

Lemma La A være en symmetrisk $n \times n$ matrise, og la $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ være egenvektorer til A med $A\vec{v}_i = \lambda_i \vec{v}_i$.

hvor $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Da er

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0.$$

<u>Bevis</u>: $\lambda_1 (\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2)$

$= (A\vec{v}_1) \cdot \vec{v}_2 = \vec{v}_1 \cdot (A^T \vec{v}_2)$

$= \vec{v}_1 \cdot (A\vec{v}_2) = \vec{v}_1 \cdot (\lambda_2 \vec{v}_2)$

$= \lambda_2 (\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2)$

$\Rightarrow \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_2)}_{\neq 0} \cdot (\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2) = 0$

$\Rightarrow \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0.$ //

Spektralteoremet

La A vara en symmetrisk $n \times n$ matris. Då har $\mathbb{R}^n$ en ortonormerat basis som består av egenvektorer för A.

Bevis för $n=2$: La

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix},$$

där a, b, d är reella tal.

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - \operatorname{tr}(A)\cdot\lambda + \det(A)$$
$$= \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - b^2$$

Eigenwerte für A:

$$\lambda = \frac{a+d \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4(ad-b^2)}}{2}$$

$$(a+d)^2 - 4(ad-b^2)$$
$$= a^2 + 2ad + d^2 - 4ad + 4b^2$$
$$= a^2 - 2ad + d^2 + 4b^2$$
$$= (a-d)^2 + 4b^2$$
$$\geq 0$$

$\Rightarrow$ A hat kun reelle Eigenwerte.

Tilfelle 1: $a = d$, $b = 0$.

Da er

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = a\underline{I}$$

$\Rightarrow Av = av$ for alle $v \in \mathbb{R}^2$.

$\Rightarrow$ Standardbasisen $\{e_1, e_2\}$ er en ortonormert basis av egenvektorer for A.

Tilfelle 2: $a \neq d$ eller $b \neq 0$.

Da har A to forskjellige egenverdier λ_1, λ_2 med

egenvektorer v_1, v_2. Sidan $v_1 \cdot v_2 = 0$ (ifølge tidligere lemma), er

$$\left\{ \frac{v_1}{\|v_1\|}, \frac{v_2}{\|v_2\|} \right\}$$

en ortonormal basis av egenvektorer for A. //

Def: En symmetrisk matrise A kalles positiv definitt dersom alle egenverdiene for A er positive.

Hvis $A = (a_{ij})$ er en slik matrise og $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$, definerer vi

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle_A := \vec{x} \cdot (A\vec{y})$$

$$= \sum_{ij} a_{ij} x_i y_j$$

<u>Teorem</u> La A være en positiv definitt symmetrisk $n \times n$ matrise. Da er

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle_A = \vec{x} \cdot (A\vec{y})$$

et indreprodukt på $\mathbb{R}^n$, og ethvert indreprodukt på $\mathbb{R}^n$ kan uttrykkes på denne formen.

Bevis: (i) La A være en pos. def. symmetrisk $n \times n$ matrise. Vi sjekker at $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$ oppfyller aksiomene for et indreprodukt.

Bilinearitet:

$$\langle s\vec{x} + t\vec{y}, \vec{z} \rangle_A = (s\vec{x} + t\vec{y}) \cdot A\vec{z}$$

$$= s(\vec{x} \cdot A\vec{z}) + t(\vec{y} \cdot A\vec{z})$$

$$= s\langle \vec{x}, \vec{z} \rangle_A + t\langle \vec{y}, \vec{z} \rangle_A.$$

Tilsvarende:

$$\langle \vec{x}, s\vec{y} + t\vec{z} \rangle_A$$

$$= s\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle_A + t\langle \vec{x}, \vec{z} \rangle_A.$$

Symmetri: $\langle \vec{y}, \vec{x} \rangle_A = \vec{y} \cdot (A\vec{x})$

$$= \vec{y} \cdot (A^T \vec{x}) = A\vec{y} \cdot \vec{x}$$

$$= \vec{x} \cdot A\vec{y} = (\vec{x}, \vec{y})_A .$$

<u>Påminnelse</u>: Låt $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ vara en ortonormerad bas för $\mathbb{R}^n$ som består av egenvektorer för A, här

$$A\vec{v}_i = \lambda_i \vec{v}_i , \quad \lambda_i > 0.$$

Här är $\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} t_i \vec{v}_i , \quad t_i \in \mathbb{R}$,

så

$$A\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} t_i A\vec{v}_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} t_i \lambda_i \vec{v}_i .$$

$$\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle_A = \vec{x}^{\,t} \cdot A \vec{x}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} t_i \vec{v}_i \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} t_j \lambda_j \vec{v}_j \right)$$

$$= \sum_{i,j} t_i t_j \lambda_j \left(\vec{v}_i \cdot \vec{v}_j \right)$$

$$= \sum_{i} t_i^2 \lambda_i \left(\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i \right)$$

$$= \sum_{i} t_i^2 \lambda_i \qquad \lambda_i > 0$$

Hvis $\vec{x} \neq 0$, er $t_i \neq 0$ for minst én i, og

$$\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle_A = \sum_{i} t_i^2 \lambda_i > 0.$$

(ii) La $\langle \cdot, \cdot \rangle$ vær et vilkårlig indreprodukt på $\mathbb{R}^n$. La $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ vær standardbasis for $\mathbb{R}^n$. Sett

$$a_{ij} = \langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle .$$

Da er $A = (a_{ij})$ en symmetrisk matrise, og

$$\langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle = \vec{e}_i \cdot A\vec{e}_j$$

Hvis $\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e}_i$, $\vec{y} = \sum_{j=1}^{n} y_j \vec{e}_j$, er

$$\vec{x} \cdot A\vec{y} = \sum_{i,j} x_i y_j \left(\vec{e}_i \cdot A\vec{e}_j\right)$$

$$= \sum_{i,j} x_i y_i \langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle_A$$

$$= \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle_A .$$

Det gjenstår å vise at A er positiv definitt. La $\vec{v}$ være en egenvektor for A med

$$A\vec{v} = \lambda \vec{v} .$$

$$0 < \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = \vec{v} \cdot A\vec{v}$$

$$= \lambda \underbrace{(\vec{v} \cdot \vec{v})}$$

> 0

$\Rightarrow \lambda > 0.$ //

Eks: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 3$$
$$= (\lambda - 1)(\lambda - 3)$$

$\Rightarrow$ A har egenverdier

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 3.$$

$$\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle_A = \vec{x} \cdot A\vec{x}$$

$$= \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j$$

$$= \sum_i a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{i<j} a_{ij} x_i x_j$$

$$= 2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1 x_2$$

$$= x_1^2 + x_2^2 + \left(x_1^2 - 2x_1 x_2 + x_2^2 \right)$$

$$= x_1^2 + x_2^2 + (x_1 - x_2)^2$$

$> 0 \quad$ hvis $\vec{x} \neq 0$.

Eks: P_1 = vektorrommet av alle polynomer $f(x) = ax + b$, hvor $a, b \in \mathbb{R}$.

Vi betrakter P_1 med indreproduktet

$$\langle f_1, f_2 \rangle_{L^2([0,1])} = \int_0^1 f_1(x) f_2(x)\, dx$$

Merk: Hvis $f(x) = ax + b$ og

$$\int_0^1 f(x)^2\, dx = 0$$

må $f(x) = 0$ for $0 \leq x \leq 1$

og desmud $a = b = 0$.

La $f_1(x) = a_1 x + b_1$

$f_2(x) = a_2 x + b_2$.

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \int_0^1 (a_1 x + b_1)(a_2 x + b_2)\, dx$$

$$= \int_0^1 \left[a_1 a_2 x^2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) x + b_1 b_2 \right] dx$$

$$= \frac{1}{3} a_1 a_2 + \frac{1}{2}(a_1 b_2 + a_2 b_1) + b_1 b_2$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} \cdot A \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix},$$

hvor

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Egenverdiene til A er:

$$\frac{4 \pm \sqrt{73}}{6} \quad : \text{ positive.}$$

Vi kan identifisere P_1 med $\mathbb{R}^2$ ved avbildningen

$$P_1 \to \mathbb{R}^2, \quad ax+b \mapsto \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},$$

og indreproduktet $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2([0,1])}$ svarer da til $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$ på $\mathbb{R}^2$.

<u>En ortonormal basis for P_1:</u>

Vi skriver $\langle \cdot, \cdot \rangle = \langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2([0,1])}$.

$$\|1\|^2 = \int_0^1 1 \cdot 1 \, dx = 1 \quad \Rightarrow \quad \|1\| = 1.$$

Hvis $f(x) = ax + b$, er

$$\langle 1, f \rangle = \int_0^1 1 \cdot (ax + b) \, dx$$

$$= \frac{a}{2} + b$$

Altså, $1 \perp (ax + b) \Leftrightarrow a = -2b$.

$$\|2x - 1\|^2 = \int_0^1 (2x - 1)^2 \, dx$$

$$= \int_0^1 (4x^2 - 4x + 1) \, dx$$

$$= \frac{4}{3} - 2 + 1 = \frac{1}{3}$$

$\Rightarrow \quad \|2x-1\| = \frac{1}{\sqrt{3}}.$

$\Rightarrow \quad \|\sqrt{3}\cdot(2x-1)\| = 1$

<u>Konklusion</u> : $\{1, \sqrt{3}\cdot(2x-1)\}$

is an orthonormal basis

for P_1.

6.4 Fourier-rekker

Def: En funksjon $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sies å være *periodisk* med periode $T > 0$ ($= T$-periodisk) dersom

$$f(x+T) = f(x)$$

for alle $x \in \mathbb{R}$.

Eksempler: (i) En konstant funksjon er T-periodisk for alle $T > 0$.

(ii) cos, sin er 2π-periodiske.

Lemma Hvis $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er T-periodisk og kontinuerlig, og $a, b \in \mathbb{R}$, så er

$$\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_b^{b+T} f(x)\,dx.$$

Bevis: Kan anta $a \leq b$.

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \int_{b+T}^{b+T} f(x+T)\,dx$$

$$= \int_{a+T}^{b+T} f(u)\,du = \int_{a+T}^{b+T} f(x)\,dx$$

$u = x + T$, $du = dx$

$$\int_a^{a+T} f + \int_{a+T}^{b+T} f = \int_a^{b+T} f = \int_a^b f + \int_b^{b+T} f$$

$$\Rightarrow \int_b^{b+\bar{\imath}} f - \int_a^{a+\bar{\imath}} f = \int_{a+\bar{\imath}}^{b+\bar{\imath}} f - \int_a^b f = 0. \quad //$$