Mer om Fourier-rekker

Def: $C^\infty_{2\pi}(\mathbb{R})$ = vektorrommet av alle 2π-periodiske funksjoner $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som er uendelig mange ganger deriverbar.

Indreprodukt på $C^\infty_{2\pi}(\mathbb{R})$:

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x)\, dx.$$

La $D: C^\infty_{2\pi}(\mathbb{R}) \to C^\infty_{2\pi}(\mathbb{R})$

veen deriva sjonsoperatoren, dvs.

$$(Df)(x) = f'(x).$$

Prop: $\langle Df, g \rangle = -\langle f, Dg \rangle$
for alle $f, g \in C^\infty_{2\pi}(\mathbb{R})$.

Bevis: For $h \in C^\infty_{2\pi}(\mathbb{R})$ er

$$\int_{-\pi}^{\pi} h'(x)\,dx = h(\pi) - h(-\pi) = 0.$$

La $h = fg$. Da er

$$h' = f'g + fg'.$$

$$\Rightarrow 0 = \int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\, g(x)\, dx + \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, g'(x)\, dx$$

$$= \langle Df, g \rangle + \langle f, Dg \rangle. \quad //$$

Korollar: $\langle D^2 f, g \rangle = \langle f, D^2 g \rangle$,

d.h. D^2 ist ein "formell symmetrischer" Operator.

Beweis: $\langle D^2 f, g \rangle = -\langle Df, Dg \rangle$

$$= \langle f, D^2 g \rangle. \quad //$$

Prop: Eigenwerte von D^2 sind

$\{0, -1, -4, -9, \ldots\} = \{-n^2 \mid n \geq 0\}$.

Egenrommet til $-n^2$ består av alle funksjoner

$$a\cos(nx) + b\sin(nx) \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

Bevis: Anta f er en egenfunksjon til D^2 med

$$f'' = \lambda f, \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

(i) $\lambda = 0$. Da må

$$f(x) = c_1 x + c_2, \qquad c_i \in \mathbb{R},$$

f periodisk $\Rightarrow c_1 = 0$, dvs

f konstant.

$$f(x) = c_2 \cos(nx), \quad n = 0.$$

(ii) $\lambda = r^2 > 0$. Da er

$$f(x) = c_1 e^{rx} + c_2 e^{-rx},$$

Fordi f er periodisk, må $f = 0$.

(iii) $\lambda = -r^2 < 0$. Da er

$$f(x) = c_1 \cos(rx) + c_2 \sin(rx).$$

Fordi f er 2π-periodisk, må r være et helt tall. (Oppgave!)

//

Def: En funksjon $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kalles

* <u>jevn</u> dersom $f(-x) = f(x)$ for alle x.
* <u>odde</u> dersom $f(-x) = -f(x)$ for alle x.

<u>Eks</u>: cos er jevn,
sin er odde.

<u>Lemma</u> Hvis en odde funksjon f er integrerbar over et intervall $[-a, a)$, $a > 0$,

Så är

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0.$$

Bevis:

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = -\int_{-a}^{0} f(-x)\,dx$$

$$= \int_{a}^{0} f(u)\,du = -\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

$u = -t$,
$du = -dt$

$$\int_{-a}^{a} f = \int_{-a}^{0} f + \int_{0}^{a} f = 0. \quad //.$$

Prop: For alle hele tall $m, n \geq 0$ gjelder

(i) $$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \sin(nx)\, dx = 0.$$

(ii) Hvis $m \neq n$, er

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \cos(nx)\, dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx) \sin(nx)\, dx = 0.$$

Bevis: (i) Fordi $\cos(mx) \sin(nx)$ er odde.

(ii) Fordi D^2 er formelt symmetrisk og $\cos(mx)$, $\cos(nx)$ er egenfunksjoner som svarer til forskjellige egenverdier, må

$$\cos(mx) \perp \cos(nx).$$

Tilsvarende må $\sin(mx) \perp \sin(nx)$.
(Jfr. det tilsvarende resultat for symmetriske matriser.)

//

Prop: For $n \neq 0$ we have

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(nx)\,dx = \pi$$

Bevis: $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$

$$\Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{2}\left(\cos(2x) + 1\right)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx) = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\cos(2nx) + 1\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2n}\sin(2nx) + x\right]_{x=-\pi}^{x=\pi}$$

$$= \pi.$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(nx)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}\left(1 - \cos^2(nx)\right)dx$$

$$= 2\pi - \pi = \pi. \quad //$$

Prop: La

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \right).$$

hvor $a_n, b_n \in \mathbb{R}$. Da er

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx.$$

Bevis: Følger av de to siste proposisjonene. $\square$

Def: En slik funksjon f kalles et <u>trigonometrisk polynom</u>.

Def: La $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være en 2π-periodisk funksjon som er integrerbar over $(-\pi, \pi)$. Da definerer <u>Fourier-koeffesientene</u> til f ved

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx.$$

<u>Fourier-rekken</u> til f er

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \right).$$

Spørsmål: Konvergerer denne rekken mot $f(x)$?

Def La f, a_n, b_n være som ovenfor. Den N-te partialsummen til Fourier-rekken er

$$S_N f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \right).$$

Teorem Hvis

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 \, dx < \infty,$$

så gjelder

$$\|f - S_N f\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \left(f(x) - S_N f(x)\right)^2 dx$$

$$\to 0 \quad \text{når} \quad n \to \infty.$$

Bevis Utelatt.