Spektrateori (forts.att)

Husk: Hvis A er en $n \times n$ matrise og λ et reelt tall:

λ egenverdi for A

$$\iff \chi_A(\lambda) = 0 .$$

hvor

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

er det karakteristiske polynomet til A.

For $n = 2$:

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - \operatorname{tr}(A) \cdot \lambda + \det(A).$$

For $n = 3$:

$$\chi_A(\lambda) = -\lambda^3 + \operatorname{tr}(A) \cdot \lambda^2 - \frac{1}{2}\left[\operatorname{tr}(A)^2 - \operatorname{tr}(A^2)\right) \cdot \lambda + \det(A)$$

Cayley-Hamilton: $\chi_A(A) = 0$.

Som anvendelse vil vi udlede en formel for den inverse til en 3×3 matrix A:

$\underline{n = 3}$

$$0 = \chi_A(A)$$
$$= -A^3 + \operatorname{tr}(A) \cdot A^2$$
$$- \tfrac{1}{2}\left[\operatorname{tr}(A)^2 - \operatorname{tr}(A^2)\right] \cdot A$$
$$+ \det(A) \cdot I$$

Hvis A er invertibel, kan vi multiplisere med

$$\frac{1}{\det(A)} \cdot A^{-1}$$

og får da

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \left[A^2 - \operatorname{tr}(A) \cdot A + \frac{1}{2}\left(\operatorname{tr}(A)^2 - \operatorname{tr}(A^2) \right) I \right]$$

Eks: La

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$\det(A) = 13$ (regnet ut tidligere)

$\operatorname{tr}(A) = 0 + 2 - 1 = 1$

$$A^2 =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -5 & 0 & 2 \\ 6 & 7 & -6 \\ -1 & 5 & -7 \end{pmatrix}$$

$$tr(A^2) = -5 + 7 - 7 = -5$$

$$tr(A)^2 - tr(A^2) = 1 - (-5) = 6$$

$$A^{-1} = \frac{1}{77}\left[\begin{pmatrix} -5 & 0 & 2 \\ 6 & 7 & -6 \\ -1 & 5 & -7 \end{pmatrix}\right.$$

$$- \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\left. + \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\right]$$

$$= \frac{1}{77} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 3 & 8 & -6 \\ -5 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

Mer om Householdertransformer:

Prop: La $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$

vara en egenvektor, $v \neq 0$,

så $Q_v = I - \frac{2}{\|v\|^2} \cdot vv^T$

den tillhörande Householder-transformationen.

Da gjelder:

(i) $Q_v \cdot v = -v$

(ii) Dersom w er en

søylevektor med $v \cdot w = 0$,

så er $Q_v(w) = w$.

Bevis: For en vilkårlig vektor

w er

$$Q_v(w) = w - \frac{2}{\|v\|^2} v \overbrace{v^T}^{v \cdot w} w$$

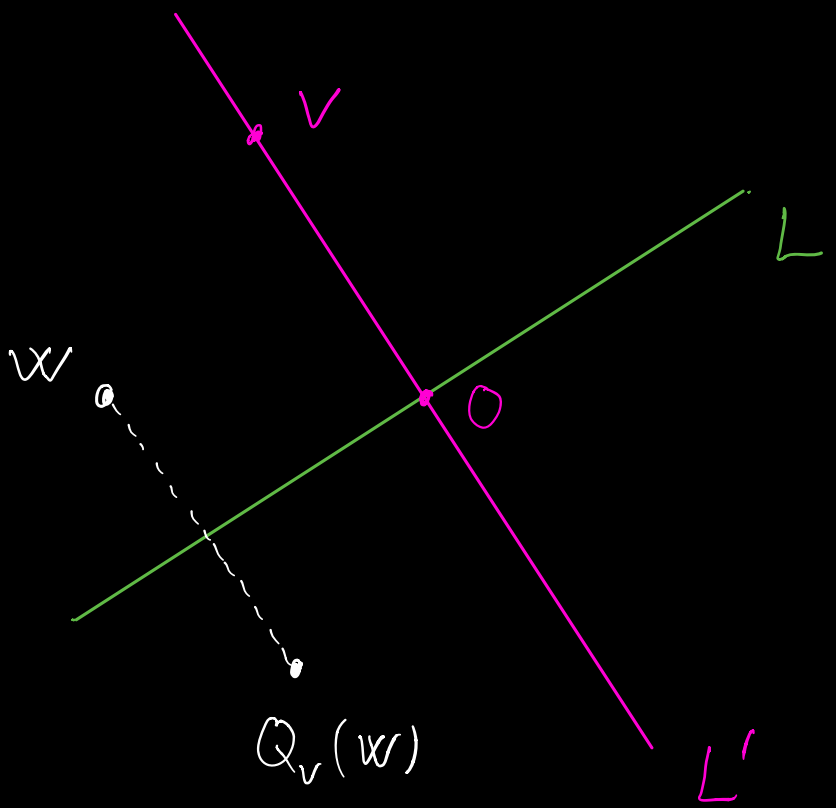
$$= w - 2\frac{v \cdot w}{\|v\|^2} \cdot v$$

(i) $Q_v(v) = v - 2v = -v$

(ii) If $v \cdot w = 0$, then

$$Q_v(w) = w. \quad //$$

For $n = 2$:



L' = linjen gjennom 0 og v

L = linjen gjennom 0 som står

normalt på L'

$Q_v(w)$ = speilingen av w i L.