Def For $F \subset \mathbb{R}^n$:

$$\text{Transl}(F) := \{a \in \mathbb{R}^n \mid F + a = F\},$$

hvor $F + a = \{x + a \mid x \in F\}$

$$= T_a(F).$$

Teorem Hvis $M \subset \mathbb{R}^2$ er en krystallstruktur, så finns det en basis $\{a, b\}$ for $\mathbb{R}^2$ slik at

$$\text{Transl}(M) = \{ma + nb \mid m, n \in \mathbb{Z}\},$$

hvor

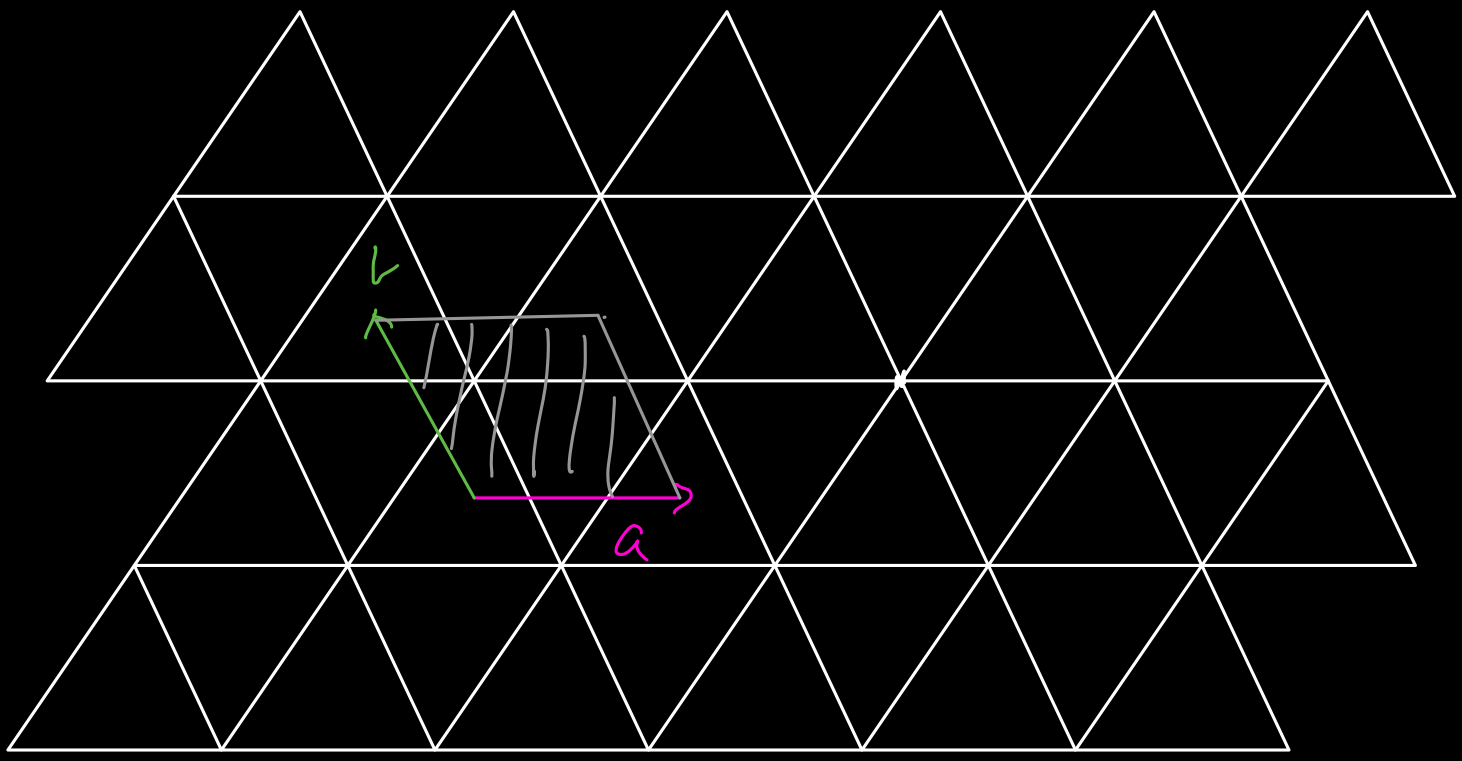
$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

er mengden av alle hele tall.

Def Hvis M, a, b er som ovenfor og $x \in \mathbb{R}^2$, så kalles parallellogrammet

$$\{x + sa + tb \mid \begin{matrix} 0 \le s \le 1, \\ 0 \le t \le 1 \end{matrix}\}$$

en enhetscelle for M.



Lemma Hvis $M \subset \mathbb{R}^2$ er en krystallstruktur, så finnes et naturlig tall N slik at enhver rotasjonssymmetri har orden høyst N.

Bevis Per antakelse finnes en

$\varepsilon > 0$ slik at M ikke har noen rotasjonssymmetrier hvor vinkelen θ oppfyller $0 < |\theta| < \varepsilon$.

Vi ser nå på rotasjonssymmetrier av M med et gitt senter $p \in \mathbb{R}^2$. Anta at hver av disse $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_{m-1}$ er vinkelen til en slik rotasjon, og at

$$0 < \theta_1 < \theta_2 < \cdots < \theta_{m-1} < 2\pi.$$

La $\theta_0 = 0$, $\theta_m = 2\pi$. For $i = 1, \cdots, m$ er også $\theta_i - \theta_{i-1}$

vinkelen hi(en rotanjanssymmetri,
altså må

$$\theta_i - \theta_{i-1} \geq \varepsilon.$$

Det gir

$$2\pi = \theta_m - \theta_0$$

$$= \sum_{i=1}^{m} (\theta_i - \theta_{i-1})$$

$$\geq m\varepsilon.$$

$$\Rightarrow m \leq \frac{2\pi}{\varepsilon}.$$

La $N = \left[\frac{2\pi}{\varepsilon}\right)$,

dvs. $\frac{2\pi}{\varepsilon}$ rundet av nedover

til nærmeste hele tall.

Vi har vist at det finns høyst

N forskjellige rotasjonssymmetrier

av $\mathcal{M}$ med et gitt senter.

La nå R være en

rotasjonssymmetri av $\mathcal{M}$.

Da kan

$$Id, R, R^2, R^3, \ldots, R^N$$

ikke være parvis forskjellige, så

det finns i, j med $0 \leq i < j \leq N$

slik at $R^i = R^j$. Det gir $R^{j-i} = Id$, så R har orden høyst N. //

<u>Lemma</u> La $p \in \mathbb{R}^2$ og la k være et naturlig tall. Da finnes det nøyaktig k forskjellige rotasjoner R om p slik at

$$R^k = Id.$$

Disse har vinkler

$$\theta = \frac{2\pi j}{k}, \quad j = 0, \dots, k-1.$$

Bevis La T ha vinkel θ.
Da har T^k vinkel $k\theta$.

$T^k = Id \iff k\theta = 2\pi j$ for en $j \in \mathbb{Z}$
$\iff \theta = \frac{2\pi j}{k}$ — " —

Siden $\frac{2\pi(j+k)}{k} = \frac{2\pi j}{k} + 2\pi$,
følger det at T har vinkel
$\frac{2\pi j}{k}$ hvor $0 \leq j < k$. //

Lemma La R være en rotasjon av planet av orden $k > 2$.
Da finnes et naturlig tall j

slik at R^j har vinkel $\frac{2\pi}{n}$.

Bevis Hvis $0 \leq i < j < k$, er $R^{j-i} \neq Id$, så $R^i \neq R^j$.

Altså er

$$Id, R, R^2, \dots, R^{k-1}$$

parvis forskjellige. Dessuten er

$$(R^j)^k = R^{jk} = (R^k)^j = Id.$$

Rotasjonsvinklene til $Id, R, \dots, R^{k-1}$ må derfor være $\frac{2\pi j}{n}$, $j = 0, \dots, k-1$ listet i passende rekkefølge.

Spesielt må $\frac{2\pi}{n}$ være vinkelen

til R^j for en $j \geq 1$.