Lineære rom og avbildninger

Def: Et <u>vektorrom</u> (= lineært rom) er en mengde V hvor addisjon og skalarmultiplikasjon er definert, dvs. at for $x, y \in V$, $a \in \mathbb{R}$ er

$$x + y \quad , \quad ax$$

definert som nye elementer av V. Disse operasjonene skal oppfylle følgende aksiomer:

(i) Addisjon er assosiativ og kommutativ; dvs:

$$(x+y)+z = x+(y+z),$$

$$x+y = y+x.$$

(ii) Det finns ett element $0 \in V$ sådant att

$$x+0 = x \quad \text{för alla } x \in V.$$

(iii) För alla $x \in V$ finns det ett element $-x$ sådant att

$$x+(-x) = 0.$$

(iv) Skalarmultiplikation uppfyller:

$$a(bx) = (ab)x$$

$$1 \cdot x = x$$

$$(a+b)x = ax+bx$$

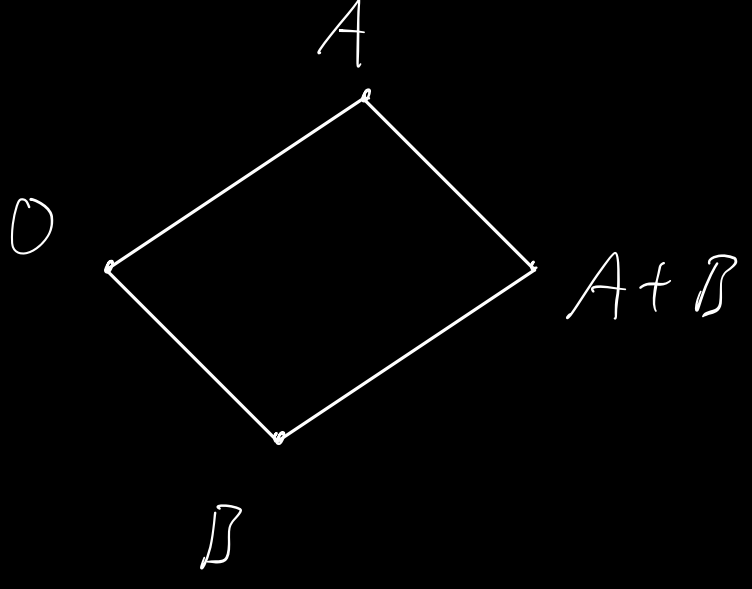
$$a(x+y) = ax + ay$$

for alle $x, y \in V$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Eks: $\mathbb{R}^2$ = mengden av alle ordnede par (a, b) av reelle tall.

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$$

$$t(a, b) = (ta, tb).$$



Eks: $\mathbb{R}^n$ = mengden av alle n-tupler $(a_1, \cdots, a_n)$ av reelle tall.

Addisjon og skalarmultiplikasjon skjer komponentvis.

Eks: $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ = mengden alle reelle $m \times n$ matriser

: reelt vektorrom

Eks: $V = \mathcal{F}(I)$ = mengden av alle reelle funksjoner definert

på et intervall $I \subset \mathbb{R}$.

Hvis f, g er to slike funksjoner, definerer vi $f+g$ ved

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x).$$

For $c \in \mathbb{R}$ er cf definert ved

$$(cf)(x) = c \cdot f(x).$$

Def: Hvis V er et vektorrom og $U \subset V$ er en delmengde som selv er et vektorrom under de samme operasjonene

addition og skalarmultiplikation,
så kallas U ett <u>underrum</u>
av V.

<u>Eks</u>: $V = \mathcal{F}(\mathbb{R})$
$= \{\text{alla funktioner på } \mathbb{R}\}$

$$U = \{a\cos x + b\sin x \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

<u>Def</u>: Ett (reellt) polynom av
grad $\leq n$ har formen

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} +$$
$$\cdots + a_1 x + a_0$$

där $a_0, a_1, \ldots, a_n$ är reella tal.

Eks: $P_n = \{$ alle reelle polynomer av grad $\leq n \}$

$\subset \mathcal{F}(\mathbb{R})$

underrom

Def: En <u>lineær kombinasjon</u> av elementene $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ er en sum

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n$$

hvor $a_1, \dots, a_n$ er reelle tall.

Def: En delmengde W av et vektorrom V sies å <u>utspenne</u> V

dersom ethvert element av V er en lineær kombinasjon av elementer av W.

Eks: $W = \{1, x, x^2, \cdots, x^n\}$

utspenner $\mathcal{P}_n$.

Def: En delmengde $\mathcal{B}$ av et vektorrom V kalles <u>lineært</u>

<u>uavhengig</u> dersom det for reelle tall $a_1, \cdots, a_n$, ikke alle like 0, og $v_1, \cdots, v_n \in \mathcal{B}$ skiller at

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n = 0.$$

Ellers kalles B lineært uavhengig.

Merk: Hvis $\sum_{i=1}^{n} a_i v_i = 0$ og $a_1 \neq 0$, så er

$$v_1 = -\frac{a_2}{a_1} v_2 - \frac{a_3}{a_1} v_3 - \cdots - \frac{a_n}{a_1} v_n$$

Altså: B lineært avhengig

$\Updownarrow$

minst ett element fra B kan uttrykkes som en lineær kombinasjon av de andre elementene av B.

Eks: $\{\cos x, \sin x\}$ er lineært uavhengig som delmengde av $\mathcal{F}(\mathbb{R})$:

Bevis: Hvis $a, b \in \mathbb{R}$ og

$$a\cos x + b\sin x = 0 \text{ for alle } x,$$

får vi:

For $x = 0$: $\quad 0 = a\cos 0 + b\sin 0 = a$

For $x = \frac{\pi}{2}$: $\quad 0 = a\cos\frac{\pi}{2} + b\sin\frac{\pi}{2} = b$

$\square$

Def: En delmengde $\mathcal{B}$ av et vektorrom V kalles en basis for V dersom:

(i) $\mathcal{B}$ utspenner V, og

(ii) $\mathcal{B}$ er lineært uavhengig.

Eks: La $V = \mathbb{R}^2$.

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} \right\}.$$

Er $\mathbb{R}^2$ utspent av $\mathcal{B}$?

La $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

Vi søker $a, b \in \mathbb{R}$ slik at

$$a\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

altså $$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -4-6 = -10 \neq 0$$

$\Rightarrow$ Vi har <u>matematisk</u> en løsning

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ $\mathcal{B}$ er en <u>basis</u> for $\mathbb{R}^2$.

<u>Eks</u>: $\mathbb{R}^n$ har <u>standardbasisen</u>

$(e_1, e_2, \dots, e_n)$, hvor

$$e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$ ← i-te komponent er lik 1, og alle andre er lik 0.

Eks: $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ er en basis for $\mathcal{P}_n$.

Lemma Hvis $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_r\}$ er en basis for et vektorrom V og $\mathcal{C} = \{w_1, \dots, w_s\}$ en delmengde hvor $s > r$, så er $\mathcal{C}$ lineært avhengig.

Bevis: Vi kan skrive

$$w_1 = a_1 v_1 + \dots + a_r v_r$$

og kan anta $a_1 \neq 0$. Da er

$$v_1 = \frac{1}{a_1} \cdot w_1 - \frac{a_2}{a_1} \cdot v_2 - \dots - \frac{a_n}{a_1} v_r$$

$\Rightarrow (w_1, v_2, \dots, v_r)$ utspenner V.

Vi kan skrive

$$w_2 = b_1 w_1 + b_2 v_2 + \dots + b_r v_r$$

Siden C er lineært uavhengig, kan ikke alle $b_2, \dots, b_r$ være lik 0. Vi kan anta $b_2 \neq 0$.

Da må $(w_1, w_2, v_3, \dots, v_r)$ utspenne V.

Ved å fortsette slik finner vi at

$$(w_1, \dots, w_r)$$

utspenner V. Altså kan vi skrive

$$w_{r+1} = c_1 w_1 + \cdots + c_r w_r,$$

så C er lineært avhengig. //

Teorem Hvis $\{v_1, \ldots, v_r\}$ og $\{w_1, \ldots, w_s\}$ er baser for det samme vektorrom V, må

$$r = s.$$

Def: Hvis V har en endelig basis $\{v_1, \ldots, v_r\}$, så kalles

$$\dim V = r$$

dimensjonen til V.

Eks: $\dim \mathbb{R}^n = n$

$\dim P_n = n+1$

Prop: La V være et vektorrom av dimensjon n.

(i) Hvis $U \subset V$ er et underrom, så er $\dim U \leq \dim V$.

(ii) Enhver lineært uavhengig delmengde $(v_1, \dots, v_r)$ kan utfylles til en basis $(v_1, \dots, v_n)$ for V.

Bevis: Utelatt.