# Isometrier i planet

Kim A. Frøyshov

Det fins fire typer isometrier i planet: Translasjoner, rotasjoner, speilinger og glidespeilinger. Vi vil nå beskrive disse.

## 1 Translasjoner

Den enkleste type isometrier er translasjonene. Gitt en vektor $\mathbf{u}$ i planet er translasjonen $T_{\mathbf{u}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definert ved

$$T_{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{u}$$

for alle punkter $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$.

## 2 Rotasjoner

La $p$ være et punkt i planet og $\theta$ et reelt tall. *Rotasjonen* om $p$ med rotasjonsvinkel $\theta$ er avbildningen $R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gitt ved

$$R(\mathbf{x}) = A(\mathbf{x} - \mathbf{p}) + \mathbf{p},$$

hvor $A$ er rotasjonsmatrisen

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Vi ser at vinkelen $\theta + 2\pi k$ gir samme rotasjon for alle hele tall $k$. Hvis $A \neq I$ (hvor $I$ er identitetsmatrisen), så består fikspunktmengden til $R$ kun av punktet $p$, som da kalles *rotasjonssenteret* til $R$.

## 3 Speilinger

La $L$ være en linje i planet. Vi kan beskrive $L$ ved å angi et punkt $p$ på $L$ og en vektor $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ parallell med $L$. Da er

$$L = \{\mathbf{p} + t\mathbf{u} \,:\, t \in \mathbb{R}\}.$$

*Speilingen* (eller *refleksjonen*) i linja $L$ er avbildningen $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gitt ved

$$S(\mathbf{x}) = A(\mathbf{x} - \mathbf{p}) + \mathbf{p},$$

hvor $A$ er speilingsmatrisen som oppfyller $A\mathbf{u} = \mathbf{u}$. For å beskrive $A$ eksplisitt velger vi en normalvektor til $L$, altså en vektor $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ slik at skalarproduktet $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$. Da er $A$ lik Housholder-matrisen til $\mathbf{v}$, altså

$$A = I - \frac{2}{\|\mathbf{v}\|^2}\mathbf{v}\mathbf{v}^T,$$

hvor $\mathbf{v}$ oppfattes som søylevektor. Siden $A\mathbf{v} = -\mathbf{v}$, er

$$S(\mathbf{p} + s\mathbf{u} + t\mathbf{v}) = \mathbf{p} + s\mathbf{u} - t\mathbf{v}$$

for alle reelle tall $s, t$. Da $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ er en basis for $\mathbb{R}^2$, kan ethvert punkt i planet uttrykkes på formen $\mathbf{p} + s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$ for passende reelle tall $s, t$, så dette gir en fullstendig beskrivelse av speilingen $S$.

## 4 Glidespeilinger

La $L$ være en linje i planet og $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ en vektor parallell med $L$. *Glidespeilingen* langs $L$ med translasjonsvektor $\mathbf{u}$ er avbildningen $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gitt ved

$$G(\mathbf{x}) = S(\mathbf{x}) + \mathbf{u},$$

hvor $S$ er speilingen i $L$. Lar vi igjen $A$ være speilingsmatrisen med $A\mathbf{u} = \mathbf{u}$, får vi den eksplisitte formelen

$$G(\mathbf{x}) = A(\mathbf{x} - \mathbf{p}) + \mathbf{p} + \mathbf{u}.$$

Mens $S(S(\mathbf{x})) = \mathbf{x}$ for alle $\mathbf{x}$, er det tilsvarende ikke riktig for glidespeilingen $G$. Vi har isteden

$$G(G((\mathbf{x})) = A(A(\mathbf{x} - \mathbf{p}) + \mathbf{u}) + \mathbf{p} + \mathbf{u} = \mathbf{x} + 2\mathbf{u},$$

hvor vi har brukt at $A^2 = I$. Dette viser at translasjonsvektoren $\mathbf{u}$, og dermed også speilingen $S$, er entydig bestemt av $G$.

## 5 Klassifikasjon av isometrier i planet

*Fikspunktmengden* til en isometri $m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ er definert ved

$$\mathcal{F}_m = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \, : \, m(\mathbf{x}) = \mathbf{x}\}.$$

En isometri $m$ kalles *ikke-triviell* dersom det fins en $\mathbf{x}$ slik at $m(\mathbf{x}) \neq \mathbf{x}$, dvs. dersom fikspunktmengden ikke er lik hele $\mathbb{R}^n$.

**Teorem 1** *Enhver ikke-triviell isometri $m : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ er av nøyaktig én av følgende typer:*

- *Translasjon, med $\mathcal{F}_m = \emptyset$ (den tomme mengde).*
- *Rotasjon om et punkt $p$, med $\mathcal{F}_m = \{\mathbf{p}\}$.*
- *Speiling om en linje $L$, med $\mathcal{F}_m = L$.*
- *Glidespeiling langs en linje, med $\mathcal{F}_m = \emptyset$.*