# Plane krystaller

Kim A. Frøyshov

En krystallstruktur i planet er, grovt sagt, et mønster som gjentar seg i flere ulike retninger. Vi vil nå gi en presis definisjon og så studere symmetriene til slike strukturer.

**Symmetrigruppen** til en delmengde $F \subset \mathbb{R}^n$ består av alle isometrier $m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ slik at $m(F) = F$. Symmetrigruppen betegnes med $\mathrm{Sym}(F)$.

En delmengde $B \subset \mathbb{R}^n$ kalles **begrenset** dersom det fins et tall $M > 0$ slik at $\|\mathbf{x}\| < M$ for alle $\mathbf{x} \in B$.

En delmengde $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$ kalles en **krystallstruktur** dersom symmetrigruppen $\mathrm{Sym}(\mathcal{M})$ er **krystallografisk**, hvilket betyr at følgende to betingelser skal være oppfylt:

**(i)** Det fins en begrenset delmengde $B \subset \mathbb{R}^n$ slik at ethvert punkt i $\mathbb{R}^n$ ligger i $m(B)$ for en eller annen $m \in \mathrm{Sym}(\mathcal{M})$. Med andre ord skal mengdene $m(B)$ dekke hele $\mathbb{R}^n$.

**(ii)** $\mathrm{Sym}(\mathcal{M})$ inneholder ikke elementer vilkårlig nær men forskjellig fra identitetsavbildningen Id.

For $n = 2$ betyr betingelsen (ii) mer konkret at det fins en $\epsilon > 0$ slik at $\mathcal{M}$ ikke har noen translasjonssymmetri $T_a$ hvor $0 < \|a\| < \epsilon$ og ikke noen rotasjonssymmetri hvor rotasjonsvinkelen $\theta$ tilfredsstiller $0 < |\theta| < \epsilon$.

Det finnes opp til isomorfi 17 krystallografiske grupper i planet ($n = 2$) og 230 i rommet ($n = 3$).

Vi vil nå se nærmere på symmetriene til en plan krystallstruktur $\mathcal{M}$, og vi begynner med translasjonssymmetriene.

En vektor $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$ kalles en **translasjonsvektor** for $\mathcal{M}$ dersom translasjonen $T_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{a}$ er en symmetri av $\mathcal{M}$, dvs. dersom

$$\mathcal{M} + \mathbf{a} = \mathcal{M}.$$

Mengden av alle translasjonsvektorer betegner vi med $\mathrm{Transl}(\mathcal{M})$.

**Teorem 1** *Hvis $\mathcal{M}$ er en krystallstruktur i planet, så fins det en basis $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ for $\mathbb{R}^2$ slik at Transl($\mathcal{M}$) består av alle heltallige lineærkombinasjoner av $\mathbf{a}, \mathbf{b}$, dvs.*

$$\mathit{Transl}(\mathcal{M}) = \{m\mathbf{a} + n\mathbf{b} \,:\, m, n \in \mathbb{Z}\}.$$

Hvis $\mathcal{M}, \mathbf{a}, \mathbf{b}$ er som i teoremet og $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, så kalles parallellogrammet

$$\{\mathbf{x} + s\mathbf{a} + t\mathbf{b} \,:\, 0 \leq s \leq 1,\ 0 \leq t \leq 1\}$$

utspent av $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ en *enhetscelle* for $\mathcal{M}$. Det vil alltid være mange forskjellige enhetsceller, for $\mathbf{x}$ kan jo velges vilkårlig, og det vil også være mange mulige valg av $\mathbf{a}, \mathbf{b}$.

**Teorem 2** *En rotasjonssymmetri av en plan krystallstruktur kan kun ha orden $1, 2, 3, 4$ eller $6$.*