Onsdag 1. mars 2023

Mål for regneøvelsen, onsdag 1. mars 2023:

- Kunne skrive en vektor som en lineær kombinasjon av andre vektorer. Oppgaver for mengdetrening: 82-85
- Kunne vise at en mengde danner en basis. Oppgaver for mengdetrening: 90-94

Sjekk for nivå 2-kompetanse (jfr. læringsnivåene fra 23. februar) innen dette målområdet: Oppgave 134 og 137

Torsdag 2. mars 2023

Geometri i planet:

1. Geometrisk toklning av lineære avbildninger
1. Elementære matriser, skalering, permutering, forskyvning, geometrisk tolkning
1. Rotasjoner som sammensetning av elementære matriser
1. Refleksjoner som sammensetning av elementære matriser
2. Stive bevegelser i planet (isometrier): rotasjoner, refleksjoner, translasjoner
2. Sammenheng mellom stive bevegelser og ortogonale matriser
2. Fikspunktsmengder
2. Rotasjoner om vilkårlige rotasjonssentra
2. Refleksjoner om vilkårlige refleksjonsakser

Noen viktige punkter:

Definisjon (4.2.3)**.** *En avbildning $m : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ kalles en **stiv bevegelse** eller en **isometri** hvis den bevarer avstander, dvs. for vilkårlig valgte punkter $P, Q \in \mathbb{R}^2$ så er $\|P-Q\| = \|m(P)-m(Q)\|$. En isometri som avbilder en delmengde F av planet på seg selv kalles en **symmetri** av F.*

Teorem (4.2.7)**.** *Enhver isometri kan skrives som en sum av en ortogonal lineær operator og en translasjon, dvs.*

$$m(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$$

Ortogonale 2×2-matriser er alltid på formen

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

hvor $a^2+c^2=b^2+d^2=1$ og $ab+cd=0$. Vi kan erstatte $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ (siden den har lengde 1) med $\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$, og $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ med $\begin{pmatrix} \sin\phi \\ \cos\phi \end{pmatrix}$ (merk trikset med å bytte sinus og cosinus her). Den siste relasjonen gir

$$\cos\theta\sin\phi+\sin\theta\cos\phi=\sin(\theta+\phi)=0$$

som betyr at $\theta+\phi=0$ eller $\theta+\phi=\pi$. I det første tilfellet får vi $\phi=-\theta$ som gir oss en rotasjonsmatrise

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin(-\theta) \\ \sin\theta & \cos(-\theta) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Den andre muligheten, $\phi=\pi-\theta$ gir

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin(\pi-\theta) \\ \sin\theta & \cos(\pi-\theta) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

som vi kan skrive om til

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

som er et produkt av en rotasjons- og en refleksjons-matrise. Det betyr at

Teorem. *En ortogonal 2×2-matrise kan alltid skrives enten som en rotasjonsmatrise eller som et produkt av en rotasjons- og en refleksjons-matrise.*