Onsdag 15. mars 2023

Mål for regneøvelsen, onsdag 15. mars 2023; vi viderefører målet fra forrige uke:

Kunne gå fram og tilbake mellom geometrisk tolkning av stive bevegelser og matriseregning.

Oppgavene er de samme bortsett fra at det er lagt til fire oppgaver til på slutten.

I arbeidet inngår følgende matriser:

Rotasjon ρ_θ med vinkel θ:

$$\rho_{\frac{\pi}{6}} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \qquad \rho_{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rho_{\frac{\pi}{3}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad \rho_{\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Refleksjoner:

$$\text{om linja } y = x\text{:} \quad R_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{om linja } y = -x\text{:} \quad R_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Regn ut determinanten til $\rho_{\frac{\pi}{6}}$, $\rho_{\frac{\pi}{2}}$ og R_1.
2. Regn ut det karakteristiske polynomet til $\rho_{\frac{\pi}{3}}$ og vis at det ikke har noen reelle nullpunkter ved å se på det som står under rottegnet i abc-formelen.
3. Finn egenverdiene og egenvektorene til R_1
4. Hva blir $\rho_{\frac{\pi}{4}}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix})$? og hva blir $R_1(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix})$? (Bruk matrisene og gang ut)
5. Bruk matrisene til å regne ut at $(\rho_{\frac{\pi}{6}})^2 = \rho_{\frac{\pi}{3}}$.
6. Vi skal finne et uttrykk for rotasjon om punktet $(1,1)$ med vinkel $\frac{\pi}{3}$.

   i) Vi starter med et vilkårlig punkt som vi kaller $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

   ii) Vektoren fra $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ til $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ er gitt ved $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   iii) Denne vektoren roterer vi med en vinkel $\frac{\pi}{3}$ ved å gange med $\rho_{\frac{\pi}{3}}$.

   iv) Nå har vi kommet fram til svarets koordinater relativt til punktet $(1,1)$. For å finne det rette svaret må vi derfor legge til $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ og vi ender opp med uttrykket

   $$\rho_{\frac{\pi}{3}} \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   som vi skal finne ved å sette inn for $\rho_{\frac{\pi}{3}}$ og regne ut.

7. Regn ut sammensetningen av de to refleksjonene, R_1R_2.

8. En stiv bevegelse $m : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ er gitt ved

$$m\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y+1 \\ x-1 \end{pmatrix}$$

i) Skriv avbildningen på formen

$$m\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \mathbf{b}$$

for en ortogonal 2×2-matrise A og en plan vektor $\mathbf{b}$.

ii) Regn ut determinanten til A for å avgjøre om dette er en rotasjon eller refleksjon. Hvordan vet vi at det er en refleksjon? (for det er det det er)

iii) En refleksjonsmatrise har en egenvektor med egenverdi 1. Finn denne egenvektoren. Denne egenvektoren vil gi oss retningen på refleksjonslinja, dvs. den linja som fikseres ved refleksjonen.

iv) Finn to fikspunkter $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ for m, dvs. punkter som oppfyller oppfyller $m(\mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_1$ og $m(\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_2$ (Her vil det være mange å velge mellom).

v) Refleksjonslinja vil nå være linja gjennom de to punktene. Skriv opp en likning for denne.

9. En sammensetning av en refleksjon og en translasjon kalles en **glide-refleksjon**. Poenget er at etter at vi har utført refleksjonen translaterer langs med refleksjonslinja. Et eksempel på en glide-refleksjon er

$$m\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y+2 \\ x \end{pmatrix}$$

i) Skriv avbildningen på formen

$$m\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \mathbf{b}$$

for en ortogonal 2×2-matrise A og en plan vektor $\mathbf{b}$.

ii) Regn ut determinanten til A og vis at dette svarer til en refleksjon.

iii) Refleksjonslinja til denne isometrien er den samme som i forrige oppgave. Velg et punkt på refleksjonslinja $x - y - 1 = 0$ og anvend m på dette punktet. Vis at svaret fortsatt tilfredsstiller likningen $x - y - 1 = 0$ og derfor fortsatt ligger på refleksjonslinja.

iv) Vis at m ikke har noen fikspunkter og derfor ikke kan være en ren refleksjon.

10. En lineær avbildning $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ er gitt ved

$$T(x,y) = (-y,-x)$$

a) Skriv opp avbildningen på matriseform, $T(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

b) Forklar hvorfor T avbilder enhetskvadratet på firkanten med hjørner $(0,0)$, $(-1,0)$, $(0,-1)$ og $(-1,-1)$.

c) Finn en rotasjonsmatrise ρ og en refleksjon σ, gitt ved

$$\rho = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

slik at produktet $\rho\sigma$ endrer orienteringen på firkanten og avbilder hjørnet $(0,-1)$ på enhetsvektoren $(1,0)$.

11. Gjennomfør prosedyren i den foregående oppgaven på lineæravbildningen T gitt ved

$$T(x,y) = (-x+y, x+y)$$

som vi illustrerer med firkanten med hjørner $(0,0)$, $(-1,1)$, $(1,1)$ og $(0,2)$.

12. Vi skal finne et uttrykk for sammensettingen av to stive bevegelser. Den ene, R_1, er en rotasjon med vinkel $\frac{\pi}{2}$ om origo, og den andre, R_2, er en rotasjon med vinkel $-\frac{\pi}{2}$ og rotasjonssenter $(1,0)$.

a) Skriv opp en formel på formen $R_i(\mathbf{v}) = A_i\mathbf{v} + \mathbf{b}_i$ for de to avbildningene.

b) Regn ut de to komposisjonsavbildningene $R_1 \circ R_2$ og $R_2 \circ R_1$. Er de like?