Torsdag 16. mars 2023

Geometri i rommet:

1. Vektorer i $\mathbb{R}^3$
1. Kryssprodukt, finne normalvektorer
1. Trippelprodukt
1. Ortogonale 3×3-matriser
2. Isometrier i $\mathbb{R}^3$
2. Rotasjoner, refleksjoner, translasjoner
2. Fikspunktmegder

For en ortogonal matrise A har vi

$$\begin{aligned}\chi(1) &= \det(A-I) = \det(A-AA^T) = \det(I-A)\det(A) \\ &= (-1)^n \det(A-I)\det(A) = (-1)^n \chi(1)\det(A)\end{aligned}$$

som gir

$$(1-(-1)^n \det(A)) \cdot \chi(1) = 0$$

Det betyr at hvis n er odde og $\det(A) = 1$, eller n er jevn og $\det(A) = -1$, så er $\lambda = 1$ en egenverdi. Det betyr imidlertid ikke at vi ikke kan ha $\lambda = 1$ som egenverdi også i andre tilfeller.

Videre har vi

$$\chi(-1) = \det(A+I) = \det(A+AA^T) = \det(I+A)\det(A) = \chi(-1)\det(A)$$

som betyr

$$(1-\det(A)) \cdot \chi(-1) = 0$$

Dermed har vi at $\lambda = -1$ er en egenverdi for enhver ortogonal matrise med $\det(A) = -1$.

La A er en ortogonal 3×3-matrise med determinant -1. Da er det mulig at -1 er den eneste egenverdien. Et eksempel på dette er $A = -I$. Dette er altså ikke mulig for 2×2- eller 4×4-matriser. Da vil det alltid finnes et *speil* som resten reflekteres gjennom.