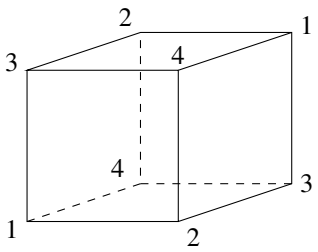
Torsdag 13. april 2023

Symmetrigrupper:

1. Repetisjon: Symmetrier av plane figurer og symmetrier som lineære avbildninger
1. Symmetrigrupper gitt ved generatorer og relasjoner
1. Ortogonale matriser, $SO(3)$
1. Symmetriene til en kube
2. Abstrakte grupper
2. Noen eksempler, symmetrier av molekyler

Symmetriene til en kube.



Symmetrier:

Rotasjon	Permutasjon	Orden	Antall
Identitet		1	1
Kant-midtpunkt	(12), (13), (14), (23), (24), (34)	2	6
Flate-midtpunkt	(1234), (1432), (1324), (1423), (1243), (1342)	4	6
Flate-midtpunkt-dobbelt	(12)(34), (13)(24), (14)(23)	2	3
Diagonal	(123), (132), (124), (142), (134), (143), (234), (243)	3	8

Vi lar $\mu = (1234)$, eller $\mu : 1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 1$ og $\rho = (12)$, eller $\rho : 1 \to 2 \to 1$. Det gir

$$\rho\mu : 2 \to 3 \to 4 \to 2$$

som åpenbart har orden 3. Faktisk kan vi lage alle symmetrier ved hjelp av ρ og μ.

$$S_4 = \langle \rho, \mu \,|\, \rho^2 = \mu^4 = (\rho\mu)^3 = e \rangle$$

	e
(12)	ρ
(13)	$\rho\mu^2\rho\mu$
(14)	$\rho\mu\rho\mu^2$
(23)	$\rho\mu^3\rho\mu^2$
(24)	$\rho\mu^2\rho\mu^3$
(34)	$\rho\mu^2\rho\mu^2\rho$
(1234)	μ
(1432)	μ^3
(1324)	$\rho\mu^2$
(1423)	$\rho\mu^2\rho\mu^2\rho\mu^2 = \mu^2\rho$
(1243)	$\rho\mu^3\rho$
(1342)	$\rho\mu\rho$
(12)(34)	$\rho\mu^2\rho\mu^2$
(13)(24)	μ^2
(14)(23)	$\rho\mu^2\rho$
(123)	$\rho\mu\rho\mu^3$
(132)	$\rho\mu^3\rho\mu^2\rho$
(124)	$\rho\mu\rho\mu^2\rho$
(142)	$\rho\mu^3\rho\mu$
(134)	$\rho\mu^3\rho\mu^3 = \mu\rho$
(143)	$\rho\mu^3$
(234)	$\rho\mu$
(243)	$\rho\mu\rho\mu = \mu^3\rho$

$$\begin{aligned}
\rho\mu^2\rho\mu^2\rho\mu^2\rho\mu^2 &= \rho(\mu^3\mu^3)\rho(\mu^3\mu^3)\rho(\mu^3\mu^3)\rho\mu^2 \\
&= \rho\mu^3(\mu^3\rho)\mu^3(\mu^3\rho)\mu^3(\mu^3\rho)\mu^2 \\
&= \rho\mu^3(\rho\mu\rho\mu)\mu^3(\rho\mu\rho\mu)\mu^3(\rho\mu\rho\mu)\mu^2 \\
&= \rho\mu^3\rho\mu\rho(\mu\mu^3)\rho\mu\rho(\mu\mu^3)\rho\mu\rho(\mu\mu^2) \\
&= \rho\mu^3\rho\mu(\rho\rho)\mu(\rho\rho)\mu\rho\mu^3 \\
&= \rho\mu^3\rho\mu\mu\mu\rho\mu^3 \\
&= \rho\mu^3\rho\mu^3\rho\mu^3 = e
\end{aligned}$$

La $\beta = (a_1 a_2 \ldots a_k)$. Permutasjonen $(12)\beta(12)$ kan vi skrive opp ved å erstatte $1 \in \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ med 2, og $2 \in \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ med 1.

Vi kan illustrere dette med et eksempel:

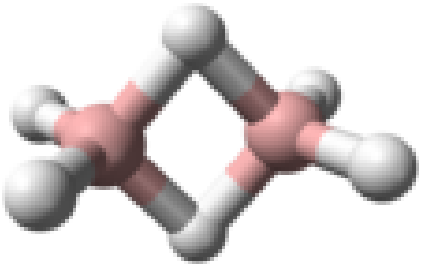
	(12)	(234)	(12)	
1	2	3	3	3
2	1	1	2	2
3	3	4	4	4
4	4	2	1	1

Dvs. $(12)(234)(12) = (134)$. Et eksempel til;

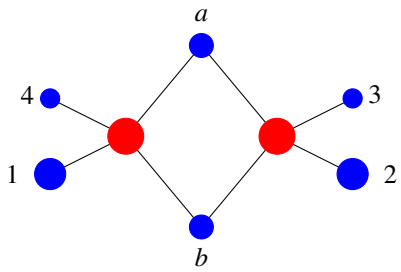
	(12)	(1324)	(12)	
1	2	4	4	4
2	1	3	3	3
3	3	2	1	1
4	4	1	2	2

som gir at $(12)(1324)(12) = (1423) = (2314)$. Vi kan skrive dette med symbolene ρ og μ:

$$\rho \cdot \rho\mu^2 \cdot \rho = \mu^2\rho = (\rho\mu^2)^3$$



Diboran; B_2H_6



Symmetrier:

- Identiteten
- Rotasjon av orden 2 om z-aksen; $\mu = (13)(24)$
- Rotasjon av orden 2 om y-aksen; $\nu = (12)(34)(ab)$
- Rotasjon av orden 2 om x-aksen; $\mu\nu = (14)(23)(ab)$
- Speiling gjennom xy-planet; $\rho = (ab)$
- Speiling gjennom xz-planet; $\mu\nu\rho = (14)(23)$
- Speiling gjennom yz-planet; $\nu\rho = (12)(34)$
- Speiling gjennom sentrum; $\mu\rho = (13)(24)(ab)$

Disyklisk gruppe (abelsk, orden = 8);

$$Dic_2 = \langle \mu, \nu, \rho \,|\, \mu^2 = \nu^2 = \rho^2 = e, \mu\nu = \nu\mu, \mu\rho = \rho\mu, \rho\nu = \nu\rho \rangle$$