Her er seks oppgavesett med oppgaver fra alle deler av pensum. Oppgaver hvor Oppgave står i rødt er ikke spesielt eksamensrelevant.

Oppgavesett 1

Oppgave 1. *Et dynamisk system er gitt ved*

$$\mathbf{x}_{n+1} = M \cdot \mathbf{x}_n$$

der M er 3×3-matrisen

$$M = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.2 & 0.2 \\ 0.1 & 0.5 & 0.4 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 \end{pmatrix}$$

og $\mathbf{x}_i$ er en 3-søylevektor.

a) *Gitt en tilstandsvektor*

$$\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 300 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Hva blir $\mathbf{x}_1$?

b) *Regn ut det karakteristiske polynomet til M og finn egenverdiene.*

c) *Finn også de tilhørende egenvektorene.*

d) *Finn en likevektstilstand $\mathbf{u}$ slik at*

$$\mathbf{u} = M \cdot \mathbf{u}$$

og der $u_1 + u_2 + u_3 = 300$.

e) *Skriv tilstandsvektoren $\mathbf{x}_0$ (fra oppgave a)) som en lineær kombinasjon av egenvektorer og vis at*

$$\lim_{n \to \infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{u}$$

Oppgave 2. a) *Vi har gitt to refleksjoner i $\mathbb{R}^3$. Den ene tar $\mathbf{v} = (1,1,0)$ på $-\mathbf{v}$, den andre tar $\mathbf{w} = (0,0,1)$ på $-\mathbf{w}$. Finn skjæringslinja mellom de to refleksjonsplanene.*

b) *La A være matrisen gitt ved*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Finn fikspunktene og determinanten til matrisen. Bruk dette til å bestemme hva slags isometri den representerer.

c) *Hva er ordenen til isometrien i oppgave b)?*

Oppgave 3. *La $\mathscr{P}_2$ være vektorrommet av polynomer av grad mindre enn eller lik 2 utstyrt med indreproduktet*

$$\langle f(x), g(x) \rangle = f(-1)g(-1) + f(0)g(0) + f(1)g(1)$$

a) *Vis at polynomene* $\frac{1}{\sqrt{2}}x$ *og* x^2-1 *begge har lengde 1 og at de står normalt på hverandre.*

b) *Finn en ortonormal basis for polynomer i* $\mathscr{P}_2$ *relativt til dette indreproduktet.*

Oppgave 4. *La* D_6 *være den dihedrale gruppa*

$$D_6 = \langle S, R \,|\, S^2 = R^6 = Id, SR^5 = RS \rangle$$

Vi definerer en avbildning $\phi : D_6 \to GL(\mathbb{R}^2)$ *ved*

$$\rho = \phi(R) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

og

$$\mu = \phi(S) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) *Vis at* ρ *har orden 6 og* μ *har orden 2.*

b) *Vis at vi har relasjonen*

$$\mu\rho^5 = \rho\mu$$

og konkluder med at ϕ *er en gruppehomomorfi, og dermed en representasjon av* D_6 *på* $\mathbb{R}^2$.

c) *La* χ *være karakteren til* ϕ. *Finn* $\chi(\rho)$ *og* $\chi(\mu)$.

Oppgavesett 2

Oppgave 1. a) *Finn fikspunktene til avbildningen*

$$T(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) *Bruk a) til å avgjøre hva slags isometri* T *er.*

c) *Vis enten ved regning eller på annen måte at* T *har orden 8, det vil si at* $T^8 = Id$.

Oppgave 2. *En dynamisk modell er gitt ved*

$$\mathbf{x}_{n+1} = M \cdot \mathbf{x}_n$$

der M *er en* 2×2*-matrise gitt ved*

$$M = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.1 \\ 0.5 & 0.9 \end{pmatrix}$$

og $\mathbf{x}_i$ *er en 2-søylevektor.*

a) *Regn ut det karakteristiske polynomet til* M *og finn egenverdier og egenvektorer.*

b) *Gitt en tilstandsfordeling*

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 150 \\ 150 \end{pmatrix}$$

Skriv $\mathbf{x}$ *som en lineær kombinasjon av egenvektorer.*

c) Finn grensen

$$\lim_{n\to\infty} M^n(\mathbf{x})$$

Oppgave 3. *Vi bruker indreproduktet* $\langle A,B\rangle = \operatorname{tr}(A^TB)$ *på vektorrommet av* 2×2*-matriser.*

a) Vis at

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

oppfyller Pythagoras setning;

$$||A||^2 + ||B||^2 = ||A-B||^2$$

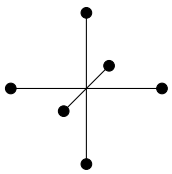
b) Forklar hvorfor $\operatorname{tr}(M^T) = \operatorname{tr}(M)$ *for en vilkårlig kvadratisk matrise* M*.*

c) Bruk b) til å vise at

$$\langle M,N\rangle = \langle N,M\rangle$$

for to vilkårlige kvadratiske matriser M *og* N*.*

Oppgave 4. *Beskriv symmetriene til den romlige figuren*



hvor de seks endepunktene har koordinater $(\pm 1,0,0)$*,* $(0\pm 1,0)$ *og* $(0,0,\pm 1)$*.*

a) La ρ_x *være rotasjon mot klokka om x-aksen og* ρ_y *rotasjon mot klokka om y-aksen. Forklar hvorfor* ρ_x *og* ρ_y *utgjør symmetrier av figuren over.*

b) La ρ_z *være rotasjon mot klokka om z-aksen. Skriv* ρ_z *som et produkt av* ρ_x *og* ρ_y*.*

c) Kan du finne en ikke-triviell relasjon mellom symmetriene ρ_x *og* ρ_y*?*

Oppgavesett 3

Oppgave 1. *Vi skal sette sammen to stive bevegelser. Den ene,* T_1*, er en rotasjon med en vinkel* $\frac{\pi}{2}$ *om punktet* $(1,1)$*, og den andre,* T_2*, er refleksjon om linja* $y=-x$*.*

a) Skriv opp formler på formen $T_i(\mathbf{v}) = A_i\mathbf{v}+\mathbf{b}_i$ *for de to avbildningene.*

b) Regn ut komposisjonen $T_1\circ T_2$*, og finn eventuelle fikspunkter.*

c) Regn også ut komposisjonen $T_2\circ T_1$*. Har denne avbildningen noen fikspunkter?*

d) Hva slags avbildning er $T_1\circ T_2 + T_2\circ T_1$*?*

Oppgave 2. *a) La* A *være en kvadratisk matrise. Vis at produktet* $B = A^TA$ *er en symmetrisk matrise.*

b) La $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ *og* A *en invertibel* $n \times n$*-matrise. Vis at*

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = A\mathbf{u} \cdot A\mathbf{v}$$

definerer et indreprodukt ved spesielt å vise at $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \geq 0$ *med likhet hvis og bare hvis* $\mathbf{u} = \mathbf{0}$*.*

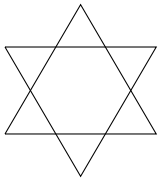
c) Vi kan skrive prikkproduktet

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}^T \mathbf{v}$$

hvor vi oppfatter vektorene som matriser. La $B = A^T A$ *være som over og la* $\mathbf{v}$ *være en egenvektor for* B *med egenverdi* λ*. Vis at* $\lambda > 0$ *ved å regne ut*

$$\lambda \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle$$

Oppgave 3. *a) Beskriv symmetriene til davidstjernen*



b) Finn generatorer og relasjoner til symmetrigruppa til davidstjernen.

c) Finn også konjugasjonsklassene til symmetrigruppa, og avgjør hvor mange elementer hver klasse inneholder.

d) Symmetrigruppa har 4 1-dimensjonale representasjoner, det vil si homomorfier inn i $\mathbb{R}^*$*.Beskriv disse 4 ved å gi verdien på hver generator.*

e) Symmetrigruppa har også en naturlig 2-dimensjonal representasjon, kalt standardrepresentasjonen. Skriv opp denne og regn også ut dens karakter.

Oppgave 4. *La* A *være matrisen gitt ved*

$$A = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & -6 \\ -2 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

a) Forklar hvorfor A *er en ortogonal matrise.*

b) Finn en egenvektor med egenverdi 1.

c) Finn fikspunktene til A *og bestem hva slags isometri den representerer.*

Oppgavesett 4

Oppgave 1. *a) Vi setter sammen en refleksjon om x-aksen med en refleksjon om y-aksen. Hva får vi? Hva får vi dersom vi bytter om på rekkefølgen?*

b) Hva får vi om vi setter sammen en refleksjon om den vertikale linja $x = a$ *med en refleksjon om den horisontale linja* $y = b$*?*

c) *Vi kaller refleksjonene i b) for $S_{x=a}$ og $S_{y=b}$. La $T_{(a,b)}$ være translasjonen*

$$T_{(a,b)}(\mathbf{v}) = \mathbf{v} + (a,b)$$

Vis at

$$S_{x=a} \circ S_{y=b} = T_{(2a,2b)} \circ S_{x=0} \circ S_{y=0}$$

Oppgave 2. *Vi lar*

$$C_n = \langle a \,|\, a^n = Id \rangle$$

betegne en gruppe generert av ett element av orden n. Dette er den sykliske n-gruppa.

a) *Vis at ordenen til C_n er n.*

b) *Vis at gruppa C_n er abelsk.*

c) *La m være et helt tall som deler n, vi skriver $n = mk$. Vis at*

$$\langle a^m \,|\, a^{mk} = Id \rangle$$

er en undergruppe av $\langle a \,|\, a^n = Id \rangle$ av orden k.

d) *Et element $g \in G$ i en gruppe er en generator for gruppa dersom $G = \langle g \rangle$. Anta at a er en generator for den sykliske gruppa C_8. Avgjør hvilke potenser a^m som også genererer hele gruppa.*

Oppgave 3. *La A være matrisen gitt ved*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

og

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) *Vis at*

$$\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$$

danner en lineært uavhengig mengde.

b) *Regn ut determinanten til A og bruk den til å beregne trippelproduktet*

$$[A\mathbf{u}, A\mathbf{v}, A\mathbf{w}]$$

Oppgave 4. *La V være vektorrommet utspent av*

$$\mathscr{B} = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \}$$

a) *Vis at mengden $\mathscr{B}$ er lineært uavhengig.*

b) *Forklar hvorfor $\mathscr{B}$ danner en basis for $\mathbb{R}^2$.*

c) La

$$\mathscr{S} = \{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\}$$

Forklar hvorfor $\mathscr{B}$ og $\mathscr{S}$ genererer samme vektorrom.

d) Skriv opp matrisen til en lineæravbildning som avbilder $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ på $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ på $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.

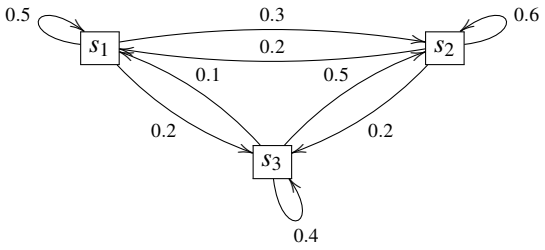
e) La

$$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

være søylene i en 2×2-matrise. Hva er rangen til denne matrisen? Og dimensjonen til nullrommet?

Oppgavesett 5

Oppgave 1. *I denne oppgaven betrakter vi et dynamisk system illustrert ved boksdiagrammet*



a) Finn overgangsmatrisen M til systemet, og forklar hva vi mener med en stokastisk matrise. Vis at M er stokastisk.

b) Regn ut det karakteristiske polynomet til M. Siden M er stokastisk kjenner vi a priori den største egenverdien til M. Bruk det til å regne ut de andre egenverdiene.

c) Regn også ut egenvektorene til M. Danner egenvektorene en basis for $\mathbb{R}^3$? Gi en kort begrunnelse for svaret.

d) Vi tar utgangspunkt i en vektor $\mathbf{v}_0 = \begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix}$. Skriv denne vektoren som en lineærkombinasjon av egenvektorer.

e) Finn et uttrykk for $M^n\mathbf{v}_0$ for et vilkårlig positivt heltall n. Hva skjer når $n\to\infty$?

f) La $W\subset\mathbb{R}^3$ generert av vektorene

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \quad og \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$$

Hva skjer med vektorer i underrommet W når vi multipliserer dem med M mange ganger?

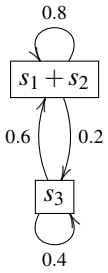
g) Hva er rangen til M?

h) Vi danner et nytt system ved å slå sammen tilstandene 1 og 2 i det opprinnelige systemet. Det betyr at vi erstatter en vektor $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ med en ny vektor i $\mathbb{R}^2$. Forklar hvorfor denne prosessen kan beskrives av en 2×3-matrise

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vi kaller denne prosessen for en projeksjon.

i) Det nye systemet kan illustreres med følgende boks-diagram



Vi lar M_1 være overgangsmatrisen for det nye systemet. Vis at overgangsmatrisene i dette tilfellet er kompatible med projeksjonen, i betydningen av at

$$M_1 \cdot P = P \cdot M$$

j) Regn ut det karakteristiske polynomet for M_1 og finn egenverdiene. Er det noen sammenheng mellom egenverdiene og egenvektorene for de to matrisene?

Generelt vil vi ikke overgangsmatrisene og projeksjonen være kompatible. Dersom verdiene på pilene fra s_1 og s_2 til s_3 hadde vært forskjellige, ville overgangs-koeffisientene til det projiserte systemet være avhengig av fordelingen mellom s_1 og s_2, og ikke bare summen av dem. I vårt tilfelle er overgangene fra s_1 og s_2 til s_3 like med verdi 0.2. Dermed vil fordelingen mellom klassene 1 og 2 ikke ha noen betydning for videre forløp når vi slår dem sammen.

Oppgave 2. *I denne oppgaven lar vi $\mathscr{P}_n$ bety vektorrommet av polynomer av grad mindre enn eller lik n.*

a) La $D : \mathscr{P}_3 \to \mathscr{P}_2$ være derivasjonsavbildningen gitt ved $D(f(x)) = f'(x)$. Forklar hvorfor vi lar avbildningen gå fra $\mathscr{P}_3$ til $\mathscr{P}_2$.

b) La $\mathscr{B}_n = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ være en basis for $\mathscr{P}_n$. Forklar hvorfor matrisen til D relativt til basisene $\mathscr{B}_3$ og $\mathscr{B}_2$ er gitt ved

$$[D] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

c) *Finn rangen og dimensjonen til nullrommet til D.*

Vi definerer integralavbildningen $I : \mathscr{P}_2 \to \mathscr{P}_3$ *ved*

$$I(f(x)) = \int_0^x f(t)\,dt$$

d) *Forklar hvorfor matrisen til I relativt til basisene* $\mathscr{B}_2$ *og* $\mathscr{B}_3$ *er gitt ved*

$$[I] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

e) *Vis at den sammensatte avbildningen* $D \circ I$ *er identiteten på* $\mathscr{P}_2$.

f) *Hva blir den sammensatte avbildningen* $I \circ D : \mathscr{P}_3 \to \mathscr{P}_3$*? Beskriv nullrommet til denne avbildningen?*

Denne oppgaven gir en illustrasjon av fundamentalteoremet for differensial- og integralregningen. For enkelthet skyld forholder vi oss til polynomer av lav grad, men vi kunne gjerne ha betraktet deriverbare funksjoner på et intervall. Vi ville da også fått at $D \circ I$ *er identiteten, mens* $I \circ D$ *har konstantfunksjonene som sitt nullrom, og forøvrig opptrer som identiteten.*

Oppgavesett 6

Oppgave 1. *Indreproduktet på vektorrommet* $M_{2\times 2}$ *av* 2×2*-matriser er gitt ved*

$$\langle A, B \rangle = \operatorname{tr}(A^T B)$$

for $A, B \in M_{2\times 2}$. *La*

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

være en rotasjon med vinkel θ *og*

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

en refleksjon om x-aksen.

a) *Regn ut normen til* R_θ *og S.*

b) *Vis at indreproduktet av to rotasjoner* $R_{\theta_1} R_{\theta_2}$ *er gitt ved*

$$\langle R_{\theta_1}, R_{\theta_2} \rangle = 2\cos(\theta_1 - \theta_2)$$

(Hint: $\cos(\theta_1 - \theta_2) = \cos\theta_1 \cos\theta_2 + \sin\theta_1 \sin\theta_2$*)*

c) *Vis at* R_θ *og S står normalt på hverandre med dette indreproduktet.*

Vi kan finne et uttrykk for en vilkårlig refleksjon gjennom origo ved å se på produktet av S med en rotasjon R_θ. *La* $S_\theta = R_\theta S$.

d) Regn ut normen $||S_\theta||$ til S_θ.

e) Vis at

$$\langle S_{\theta_1}, S_{\theta_2} \rangle = \langle R_{\theta_1}, R_{\theta_2} \rangle$$

og at

$$\langle R_{\theta_1}, S_{\theta_2} \rangle = 0$$

Oppgave 2. *Vi skal se på symmetriene til en kube K med hjørner $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$. Kuben har 6 flater som alle er kvadrater. Det finnes derfor $24 = 6 \cdot 4$ symmetrier. Vi skal finne alle disse symmetriene. La ρ være en rotasjon med vinkel $\frac{\pi}{2}$ mot klokka og med rotasjonsakse $(0,0,1)$. La videre μ være en rotasjon med vinkel $\frac{\pi}{2}$ mot klokka og med rotasjonsakse $(0,1,0)$.*

a) Skriv ρ og μ på matriseform.

b) Hva er ordenen til ρ og μ?

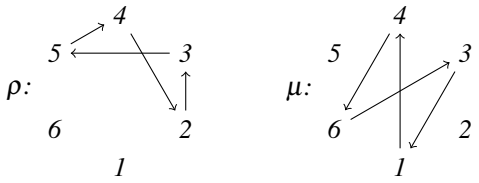
c) Produktene $\rho\mu$ og $\mu\rho$ er også rotasjoner. Finn rotasjonsaksene til de to rotasjonene. Finn også deres orden.

Symmetriene til K kan bestemmes skrittvis: Først bestemmer vi hvilken sideflate som ligger underst, deretter holder vi denne sideflaten på plass og roterer rundt normalvektoren til denne flaten. Hvilken sideflate som ligger i bunnen avgjøres gjennom å se på hvilken av enhetsvektorene $\pm\mathbf{e}_1$, $\pm\mathbf{e}_2$, $\pm\mathbf{e}_3$ som avbildes på $(0,0,-1)$.

Som et enkelt hjelpemiddel nummererer vi sideflatene som på en terning:

$$1 \longleftrightarrow (0,0,-1) \qquad 4 \longleftrightarrow (-1,0,0)$$
$$2 \longleftrightarrow (0,-1,0) \qquad 5 \longleftrightarrow (0,1,0)$$
$$3 \longleftrightarrow (1,0,0) \qquad 6 \longleftrightarrow (0,0,1)$$

Da kan vi illustrere ρ og μ ved en figur som indikerer hvordan avbildningene permuterer sideflatene:



d) Finn ut hvilken av enhetsvektorene som avbildes på $(0,0,-1)$ ved avbildningene ρ og μ.

e) Forklar hvordan man ved en kombinasjon av ρ og μ kan få en hvilken som helst av enhetsvektorene til å bli avbildet på $(0,0,-1)$.

f) Lag en tilsvarende figur som over for komposisjonen $\mu\rho$.

En konsekvens av e) er at vi kan skrive alle symmetrier som produkter av ρ-er og μ-er, men det finnes noen relasjoner mellom dem.

g) Vis ved å multiplisere ut matrisene at $\mu\rho^2 = \rho^2\mu^3$. Forklar også hvordan vi kan se dette ut fra figurene over.

Fasit

Sett 1:

Oppgave 1. *a)* $\begin{pmatrix}180\\30\\90\end{pmatrix}$

b)

$$-\lambda^3+1.5\lambda^2-0.54\lambda+0.04= \\ -(\lambda-1)(\lambda-0.4)(\lambda-0.1)$$

c) $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$

d) $\mathbf{u}=\begin{pmatrix}100\\100\\100\end{pmatrix}$

e)

$$\begin{pmatrix}300\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}100\\100\\100\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}200\\-200\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\100\\-100\end{pmatrix} \\ \mapsto \begin{pmatrix}100\\100\\100\end{pmatrix}$$

Oppgave 2. *a) Linja langs* $(1,-1,0)$ *b) Fikspunkt* $(0,0,0)$*, determinant =-1, refleksjon og rotasjon (inversjon) c) 4*

Oppgave 3. *b)* $\{\frac{1}{\sqrt{2}}x, x^2-1, \frac{1}{\sqrt{2}}x^2\}$

Oppgave 4. $\chi(\rho)=1$, $\chi(\mu)=0$

Sett 2:

Oppgave 1. *a)* $(\frac{\sqrt{2}+1}{2}, \frac{1}{2})$ *b) Rotasjon* $\frac{\pi}{4}$ *om* $\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\sqrt{2}+1\\1\end{pmatrix}$

Oppgave 2. *a)* $(\lambda-1)(\lambda-0.4)$, $\mathbf{v}_1=(1,5)$ $\mathbf{v}_2=(1,-1)$
b) $\begin{pmatrix}150\\150\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}50\\250\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}100\\-100\end{pmatrix}$ *c)* $\begin{pmatrix}50\\250\end{pmatrix}$

Oppgave 3. *b) M og M^T har samme diagonalelementer*

Oppgave 4. *b)* $\rho_z = \rho_x^{-1}\rho_y^{-1}\rho_x$
c) $\rho_x^{-1}\rho_y^{-1}\rho_x = \rho_y^{-1}\rho_x\rho_y$

Sett 3:

Oppgave 1. *a)* $T_1(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{v} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$,
$T_2(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{v}$
b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{v} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, *ingen fikspunkter*
c) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{v} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, *ingen fikspunkter*
d) $()T_1T_2 + T_2T_1)(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, *fikspunkt* $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

Oppgave 2.

Oppgave 3. *Rotasjon av orden 6, 6 refleksjoner*
b) ρ, μ, $\rho^6 = \mu^2 = Id$, $\mu\rho^5 = \rho\mu$
c) $\{Id\}$, $\{\rho, \rho^5\}$, $\{\rho^2, \rho^4\}$, $\{\rho^3\}$, $\{\mu, \rho^2\mu, \rho^4\mu\}$, $\{\rho\mu, \rho^3\mu, \rho^5\mu\}$
d) $\rho, \mu \mapsto \pm 1$
e) $\rho \mapsto \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$, $\chi = 1$,
$\mu \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\chi = 0$

Oppgave 4. *b)* $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, *c) linja langs* $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, *rotasjon*

Sett 4:

Oppgave 1. *a) Rotasjon π, motsatt $-\pi$*
b) Rotasjon π om (a, b)

Oppgave 2. *d) a, a^7*

Oppgave 3. *b) -4*

Oppgave 4. *d)* $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ *e) rang 2, nullrom 0*

Sett 5:

Oppgave 1. *a)*

$$M = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.2 & 0.1 \\ 0.3 & 0.6 & 0.5 \\ 0.2 & 0.2 & 0.4 \end{pmatrix}$$

Alle elementene i en stokastisk matrise (kvadratisk) er ikke-negative, og kolonnesummene er 1.

b)

$$\begin{aligned} \chi_M(\lambda) &= \begin{vmatrix} 0.5-\lambda & 0.2 & 0.1 \\ 0.3 & 0.6-\lambda & 0.5 \\ 0.2 & 0.2 & 0.4-\lambda \end{vmatrix} \\ &= -\lambda^3 + 1.5\lambda^2 - 0.5\lambda + 0.06 \\ &= -(\lambda-1)(\lambda^2 - 0.5\lambda + 0.06) \end{aligned}$$

Vi løser $\lambda^2 - 0.5\lambda + 0.06 = 0$ *ved abc-formelen;*

$$\lambda = \frac{0.5 \pm \sqrt{0.25 - 4 * 0.06}}{2} = 0.25 \pm 0.05$$

som gir $\lambda_2 = 0.2$ *og* $\lambda_3 = 0.3$.

c) For $\lambda_1 = 1$*;*

$$\begin{pmatrix} 0.5-1 & 0.2 & 0.1 \\ 0.3 & 0.6-1 & 0.5 \\ 0.2 & 0.2 & 0.4-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gir egenvektor

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

For $\lambda_2 = 0.2$*;*

$$\begin{pmatrix} 0.5-0.2 & 0.2 & 0.1 \\ 0.3 & 0.6-0.2 & 0.5 \\ 0.2 & 0.2 & 0.4-0.2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gir egenvektor

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

For $\lambda_3 = 0.3$*;*

$$\begin{pmatrix} 0.5-0.3 & 0.2 & 0.1 \\ 0.3 & 0.6-0.3 & 0.5 \\ 0.2 & 0.2 & 0.4-0.3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gir egenvektor

$$\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Egenvektorene korresponderer til tre forskjellige egenverdier. Da vet vi at egenvektorene er lineært uavhengig. Det er tre av dem og de ligger i $\mathbb{R}^3$*. Derfor vil de danne en basis.*

d)

$$\mathbf{v}_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gir $a+b+c=3$, $2a-2b-c=-1$ *og* $a+b=2$. *Det betyr at*

$$\mathbf{v}_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e)

$$\begin{aligned} M^n\mathbf{v}_0 &= M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + M^n \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + M^n 1 - 10 \\ &= 1^n \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (0.2)^n \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + (0.3)^n 1 - 10 \\ &= \begin{pmatrix} 1+(0.2)^n+(0.3)^n \\ 2-(0.2)^n-(0.3)^n \\ 1+(0.2)^n \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

når $n \to \infty$.

f) Vi har

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Det betyr at W *består av vektorer av typen*

$$\mathbf{v} = a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2 = (a-b) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

og derfor

$$\begin{aligned} M^n\mathbf{v} &= (a-b)(0.2)^n \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + b(0.3)^n \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &\to 0 \quad \text{når } n \to \infty \end{aligned}$$

g) $\det M = 0.06 \neq 0$, *så maksimal rang, dvs. 3*

h) Matrisen uttrykker det å slå sammen de to første klassene;

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1+s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}$$

i)

$$M_1 \cdot P = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.6 \\ 0.2 & 0.4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.8 & 0.6 \\ 0.2 & 0.2 & 0.4 \end{pmatrix}$$

$$P \cdot M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.5 & 0.2 & 0.1 \\ 0.3 & 0.6 & 0.5 \\ 0.2 & 0.2 & 0.4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.8 & 0.6 \\ 0.2 & 0.2 & 0.4 \end{pmatrix}$$

j)

$$\lambda^2 - 1.2\lambda + 0.2$$

med røtter $\lambda_1 = 1$ *og* $\lambda_2 = 0.2$*. Det er en sammenheng. De nye egenvektorene blir*

$$P \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$P \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

hvor den tredje ikke er noen egenvektor. Egenverdiene følger med.

Oppgave 2. *a) Avbildningen går fra* $\mathscr{P}_3$ *til* $\mathscr{P}_2$ *fordi derivasjon reduserer graden til et polynom med 1.*

b)

$$D(1) = 0, \quad D(x) = 1, \quad D(x^2) = 2x, \quad D(x^3) = 3x^2$$

gir

$$[D] = \begin{pmatrix} (0)_{\mathscr{B}_2} & (1)_{\mathscr{B}_2} & (2x)_{\mathscr{B}_2} & (3x^2)_{\mathscr{B}_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

c) Nullrommet er gitt ved konstantene, dvs. dimensjon 1. Det gir rang $= 4 - 1 = 3$*.*

d)

$$I(1) = x, \quad I(x) = \frac{1}{2}x^2, \quad I(x^2) = \frac{1}{3}x^3$$

gir

$$[I] = \begin{pmatrix} (1)_{\mathscr{B}_3} & (\frac{1}{2}x^2)_{\mathscr{B}_2} & (\frac{1}{3}x^3)_{\mathscr{B}_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

e) Multipliser ut $[D]\cdot[I]$.

f)

$$[I]\cdot[D]=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

Nullrommet er gitt ved

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

som svarer til de konstante polynomene.

Sett 6:

Oppgave 1. *a)*

$$\begin{aligned}\langle R_\theta,R_\theta\rangle^{\frac{1}{2}}&=\operatorname{tr}((R_\theta)^TR_\theta)^{\frac{1}{2}}\\&=\operatorname{tr}\begin{pmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\-\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}^{\frac{1}{2}}\\&=\operatorname{tr}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle S,S\rangle^{\frac{1}{2}}=\operatorname{tr}(S^TS)^{\frac{1}{2}}&=\operatorname{tr}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}^{\frac{1}{2}}\\&=\operatorname{tr}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\langle R_{\theta_1},R_{\theta_2}\rangle&=\operatorname{tr}((R_{\theta_1})^TR_{\theta_2})\\&=\operatorname{tr}\begin{pmatrix}\cos\theta_1&\sin\theta_1\\-\sin\theta_1&\cos\theta_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta_2&-\sin\theta_2\\\sin\theta_2&\cos\theta_2\end{pmatrix}\\&=2(\cos\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_1\sin\theta_2)\\&=2\cos(\theta_1-\theta_2)\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}\langle R_\theta,S\rangle&=\operatorname{tr}((R_\theta)^TS)\\&=\operatorname{tr}\begin{pmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\-\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\\&=\cos\theta-\cos\theta=0\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}||S_\theta||^2 &= \langle S_\theta, S_\theta\rangle = \operatorname{tr}((R_\theta S)^T R_\theta S)\\ &= \operatorname{tr}(S^T(R_\theta)^T R_\theta S) = \operatorname{tr}(S^T S)\\ &= ||S||^2 = 2\end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned}\langle S_{\theta_1}, S_{\theta_2}\rangle &= \operatorname{tr}(S^T(R_{\theta_1})^T R_{\theta_2} S)\\ &= \operatorname{tr}(SS^T(R_{\theta_1})^T R_{\theta_2})\\ &= \operatorname{tr}((R_{\theta_1})^T R_{\theta_2}) = \langle R_{\theta_1}, R_{\theta_2}\rangle\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle R_{\theta_1}, S_{\theta_2}\rangle &= \operatorname{tr}((R_{\theta_1})^T R_{\theta_2} S)\\ &= \operatorname{tr}\begin{pmatrix}\cos\theta_1 & \sin\theta_1\\ -\sin\theta_1 & \cos\theta_1\end{pmatrix}\\ &\qquad \begin{pmatrix}\cos\theta_2 & -\sin\theta_2\\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\\ &= \operatorname{tr}\begin{pmatrix}\cos\theta_1 & \sin\theta_1\\ -\sin\theta_1 & \cos\theta_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta_2 & \sin\theta_2\\ \sin\theta_2 & -\cos\theta_2\end{pmatrix}\\ &= \cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2\\ &\qquad -\sin\theta_1\sin\theta_2 - \cos\theta_1\cos\theta_2\\ &= 0\end{aligned}$$

Oppgave 2. *a)*

$$\rho = \begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\mu = \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

b) *ρ og μ har begge orden 4.*

c)

$$\begin{aligned}\rho\mu &= \begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

En egenvektor for egenverdien $\lambda = 1$ er gitt ved $\mathbf{v} = (1,-1,-1)$ som også er rotasjonsaksen.

$$\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

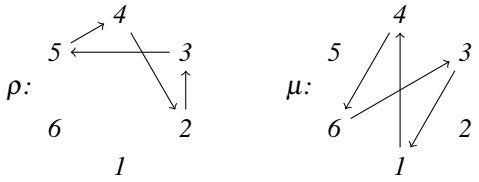
Det vil si orden 3.

$$\mu\rho = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Rotasjonsakse $(1,1,1)$ *og orden 3.*
Husk:

$$1 \longleftrightarrow (0,0,-1) \qquad 4 \longleftrightarrow (-1,0,0)$$
$$2 \longleftrightarrow (0,-1,0) \qquad 5 \longleftrightarrow (0,1,0)$$
$$3 \longleftrightarrow (1,0,0) \qquad 6 \longleftrightarrow (0,0,1)$$

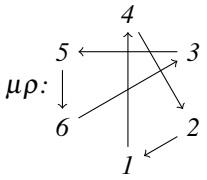
og



d) $\rho((0,0,-1)) = (0,0,-1)$ *og* $\mu((1,0,0)) = (0,0,-1)$

e) $(0,0,-1)$ *er nr. 1, og* μ *tar 3 på 1. 5 går til 3 ved* ρ^3 *og 2 går til 3 ved* ρ*. De andre går til 3 ved en passende potens av* μ*. Så alle kan komme til 3 og derfor til 1.*

f)



g)

$$\mu\rho^2 = \mu\rho\rho = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\rho^2\mu^3 &= \begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix}^3\\ &= \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

For $\mu\rho^2$ har vi

$$\begin{aligned}1 &\to 1 \to 1 \to 4\\ 2 &\to 3 \to 5 \to 5\\ 3 &\to 5 \to 4 \to 6\\ 4 &\to 2 \to 3 \to 1\\ 5 &\to 4 \to 2 \to 2\\ 6 &\to 6 \to 6 \to 3\end{aligned}$$

For $\rho^2\mu^3$ har vi

$$\begin{aligned}1 &\to 4 \to 6 \to 3 \to 5 \to 4\\ 2 &\to 2 \to 2 \to 2 \to 3 \to 5\\ 3 &\to 1 \to 4 \to 6 \to 6 \to 6\\ 4 &\to 6 \to 3 \to 1 \to 1 \to 1\\ 5 &\to 5 \to 5 \to 5 \to 4 \to 2\\ 6 &\to 3 \to 1 \to 4 \to 2 \to 3\end{aligned}$$

som gir samme sluttresultat.