MAT1060 Matematikk for anvendelser 2
Onsdag 3. Mai 2023

Oppgave 1

La $\mathcal{P}_2$ være vektorrommet av polynomer av grad mindre enn eller lik 2. Vi definerer en funsjon $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{P}_2 \times \mathcal{P}_2 \to \mathbb{R}$ ved

$$\langle f, g \rangle = f(-1)g(-1) + f(0)g(0) + f(1)g(1) \ .$$

a) Vis at $\langle \cdot, \cdot \rangle$ danner et indreprodukt på $\mathcal{P}_2$.

b) Regn ut $\langle f, g \rangle$ for $f = -2 + x + 3x^2$ og $g = 4 - 7x^2$.

c) Regn ut $\langle f, g \rangle$ for $f = -5 + 2x + 3x^2$ og $g = 3 + 2x - 4x^2$.

d) Regn ut $\langle f, g \rangle$ for $f = 1 + x^2$ og $g = x - x^2$.

e) Regn ut normen til $1, x$ og x^2.

f) Vis at $\{1, x, x^2\}$ er en basis for $\mathcal{P}_2$ som ikke er ortonormal med hensyn på $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

g) Finn en basis for $\mathcal{P}_2$ som er ortonormal med hensyn på $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ved å bruke

$$\mathbf{w} = x^2 - \langle x^2, \frac{1}{\sqrt{3}} \rangle \frac{1}{\sqrt{3}} - \langle x^2, \frac{x}{\sqrt{2}} \rangle \frac{x}{\sqrt{2}} \ .$$

Oppgave 2

Gitt en 2×2 matrise A, vi definer en funsjon $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ved

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_A = \mathbf{u}^T A \mathbf{v} \ .$$

a) Vis at $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$ er et indreprodukt når $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Regn ut $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_A$ for $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ og $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

b) Vis at $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$ er et indreprodukt når $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Regn ut $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_A$ for $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ og $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

c) Vis at $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$ er et indreprodukt når $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Regn ut $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_A$ for $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ og $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

d) Vi setter $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_A = B\mathbf{u} \cdot B\mathbf{v}$. Finn A når $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

e) Vi setter $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_A = B\mathbf{u} \cdot B\mathbf{v}$. Finn A når $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

f) Vi setter $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_A = B\mathbf{u} \cdot B\mathbf{v}$. Finn A når $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Oppgave 3

Vi betrakter vektorrom av 2×2 matriser med inndreproduktet gitt ved

$$\langle A, B \rangle = \mathrm{tr}(A^T B) \ .$$

Husk at trasen til en kvadratisk matrise M er summen av diagonalelementene til M.

a) Regn ut $\langle A, B \rangle$ når $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$ og $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Regn ut $\langle A, B \rangle$ når $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ og $B = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$.

c) Regn ut $\langle A, B \rangle$ når $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ og $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

d) Vis at

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \ , \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

oppfyller Pythagoras setning

$$\| A \|^2 + \| B \|^2 = \| C \|^2 \ .$$

e) La

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \ , \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \ , \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

i) Regn ut normen til A, B og C.
ii) Vis at A står normalt på B.
iii) Verifiser at Pythagoras setning gjelder for triplet A, B, C.

f) La $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. Finn to lineært uavhenginge matriser B, C slik at $\langle B, A \rangle = 0$ og $\langle C, A \rangle = 0$.

Oppgave 4

a) La

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 2\,,\ \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = -3\,,\ \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle = 5\,,\ \| \mathbf{u} \| = 1\,,\ \| \mathbf{v} \| = 2\,,\ \| \mathbf{w} \| = 3$$

Regn ut

i) $\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{v} + \mathbf{w} \rangle$

ii) $\langle 2\mathbf{u} - \mathbf{w}, 3\mathbf{u} + 2\mathbf{v} \rangle$

iii) $\| \mathbf{u} + \mathbf{v} \|$.

b) La

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 9\,, \quad \| \mathbf{u} \| = \| \mathbf{v} \| = \sqrt{18}$$

Finn vinkelen mellom $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$.