9. februar 2023

MAT 1060

Obligatorisk oppgave 1 av 2

Innleveringsfrist

Torsdag 23. februar 2023, klokken 14:30 i Canvas (canvas.uio.no) eller ved oppmøte på fellesøvelsen onsdag 22. februar kl. 0815-1000.

Instruksjoner

Hvis du leverer på fellesøvelsen:
Dette alternativet forutsetter at du har deltatt på hele øvelsen og jobbet med denne oppgaven, og at du underveis har samarbeidet med noen av dine medstudenter. En faglærer vil være til stede og dokumentere nødvendig deltagelse.
Hvis du leverer via Canvas:
Du velger selv om du skriver besvarelsen for hånd og scanner besvarelsen eller om du skriver løsningen direkte inn på datamaskin (for eksempel ved bruk av LaTeX). Besvarelsen skal leveres som én PDF-fil. Scannede ark må være godt lesbare. Besvarelsen skal inneholde navn, emne og oblignummer og være levert før innleveringsfristen.

Søknad om utsettelse av innleveringsfrist

Hvis du blir syk eller av andre grunner trenger å søke om utsettelse av innleveringen, må du ta kontakt med studieadministrasjonen ved Matematisk institutt (e-post: studieinfo@math.uio.no) i god tid før innleveringsfristen.

For å få adgang til avsluttende eksamen i dette emnet, må man bestå alle obligatoriske oppgaver i ett og samme semester.

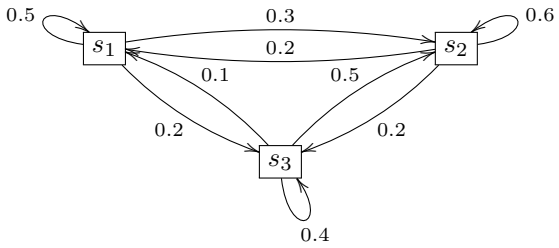
For fullstendige retningslinjer for innlevering av obligatoriske oppgaver, se her:

www.uio.no/studier/admin/obligatoriske-aktiviteter/mn-math-oblig.html

LYKKE TIL!

Alle delspørsmålene teller like mye og for å få godkjent trengs normalt ca. 50 % av maks-skår.

I oppgaven betrakter vi et dynamisk system illustrert ved boks-diagrammet



Oppgave 1. Finn overgangsmatrisen M til systemet, og forklar hva vi mener med en stokastisk matrise. Vis at M er stokastisk.

Oppgave 2. Regn ut det karakteristiske polynomet til M. Siden M er stokastisk vet vi at den største egenverdien til M er 1. Bruk det til å regne ut de andre egenverdiene.

Oppgave 3. Regn også ut egenvektorene til M. Danner egenvektorene en basis for $\mathbb{R}^3$? Gi en kort begrunnelse for svaret. Egenvektorene danner en basis for $\mathbb{R}^3$ dersom enhver vektor i $\mathbb{R}^3$ kan skrives som en lineærkombinasjon av egenvektorer.

Oppgave 4. Vi tar utgangspunkt i en vektor $\mathbf{v}_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Skriv denne vektoren som en lineærkombinasjon av egenvektorer.

Oppgave 5. Finn et uttrykk for $M^n\mathbf{v}_0$ for et vilkårlig positivt heltall n. Hva skjer når $n \to \infty$?

Oppgave 6. La $w \in \mathbb{R}^3$ være gitt som en lineærkombinasjon av vektorene

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{og} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

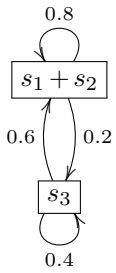
Hva skjer med w når vi multipliserer den med M mange ganger?

Oppgave 7. Vi danner et nytt system ved å slå sammen tilstandene 1 og 2 i det opprinnelige systemet. Det betyr at vi erstatter en vektor $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ med en ny vektor $\mathbf{u}'$ i $\mathbb{R}^2$ hvor første-koordinaten til $\mathbf{u}'$ er summen av de to første koordinatene i $\mathbf{u}$. Forklar hvorfor denne prosessen kan beskrives som et produkt med 2×3-matrisen

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vi kaller denne prosessen for en projeksjon.

Oppgave 8. Det nye systemet kan illustreres med følgende boks-diagram



Vi lar M_1 være overgangsmatrisen for det nye systemet. Vis at overgangsmatrisen i dette tilfellet er kompatibel med projeksjonen, i betydningen av at

$$M_1 \cdot P = P \cdot M$$

Oppgave 9. Regn ut det karakteristiske polynomet for M_1 og finn egenverdiene. Er det noen sammenheng mellom egenverdiene og egenvektorene for de to matrisene?

Generelt vil vi ikke overgangsmatrisene og projeksjonen være kompatible. Dersom verdiene på pilene fra s_1 og s_2 til s_3 hadde vært forskjellige, ville overgangskoeffisientene til det projiserte systemet være avhengig av fordelingen mellom s_1 og s_2, og ikke bare summen av dem. I vårt tilfelle er overgangene fra s_1 og s_2 til s_3 like med verdi 0.2. Dermed vil fordelingen mellom klassene 1 og 2 ikke ha noen betydning for videre forløp når vi slår dem sammen.