MAT 1060

Obligatorisk oppgave 1 av 2, løsningsforslag

Oppgave 1.

$$M = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.2 & 0.1 \\ 0.3 & 0.6 & 0.5 \\ 0.2 & 0.2 & 0.4 \end{pmatrix}$$

Alle elementene i en stokastisk matrise (kvadratisk) er ikke-negative, og kolonnesummene er 1.

Oppgave 2.

$$\chi_M(\lambda) = \begin{vmatrix} 0.5-\lambda & 0.2 & 0.1 \\ 0.3 & 0.6-\lambda & 0.5 \\ 0.2 & 0.2 & 0.4-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 1.5\lambda^2 - 0.56\lambda + 0.06$$

$$= -(\lambda - 1)(\lambda^2 - 0.5\lambda + 0.06)$$

Vi løser $\lambda^2 - 0.5\lambda + 0.06 = 0$ ved abc-formelen;

$$\lambda = \frac{0.5 \pm \sqrt{0.25 - 4 * 0.06}}{2} = 0.25 \pm 0.05$$

som gir $\lambda_2 = 0.2$ og $\lambda_3 = 0.3$.

Oppgave 3. For $\lambda_1 = 1$;

$$\begin{pmatrix} 0.5-1 & 0.2 & 0.1 \\ 0.3 & 0.6-1 & 0.5 \\ 0.2 & 0.2 & 0.4-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gir egenvektor

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

For $\lambda_2 = 0.2$;

$$\begin{pmatrix} 0.5-0.2 & 0.2 & 0.1 \\ 0.3 & 0.6-0.2 & 0.5 \\ 0.2 & 0.2 & 0.4-0.2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gir egenvektor

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

For $\lambda_3 = 0.3$;

$$\begin{pmatrix} 0.5-0.3 & 0.2 & 0.1 \\ 0.3 & 0.6-0.3 & 0.5 \\ 0.2 & 0.2 & 0.4-0.3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gir egenvektor

$$\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vi ønsker å skrive en vilkårlig vektor $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ som en lineærkombinasjon av de tre vektorene $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ og $\mathbf{v}_3$. Det betyr at vi må finne tre tall x, y og z slik at

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{a}$$

Dette lar seg alltid gjøre siden

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$

Oppgave 4.

$$\mathbf{v}_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gir $a+b+c=3$, $2a-2b-c=-1$ og $a+b=2$. Det betyr at

$$\mathbf{v}_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Oppgave 5.

$$\begin{aligned} M^n \mathbf{v}_0 &= M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + M^n \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + M^n \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= 1^n \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (0.2)^n \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + (0.3)^n \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1+(0.2)^n+(0.3)^n \\ 2-(0.2)^n-(0.3)^n \\ 1+(0.2)^n \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{når } n \to \infty \end{aligned}$$

Oppgave 6. Vi har

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Det betyr at w er gitt ved

$$\mathbf{w} = a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2 = (a-b) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

og derfor

$$M^n \mathbf{w} = (a-b)(0.2)^n \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + b(0.3)^n \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \to 0 \quad \text{når } n \to \infty$$

Oppgave 7. Matrisen uttrykker det å slå sammen de to første klassene;

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1 + s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}$$

Oppgave 8.

$$M_1 \cdot P = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.6 \\ 0.2 & 0.4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.8 & 0.6 \\ 0.2 & 0.2 & 0.4 \end{pmatrix}$$

$$P \cdot M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.5 & 0.2 & 0.1 \\ 0.3 & 0.6 & 0.5 \\ 0.2 & 0.2 & 0.4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.8 & 0.6 \\ 0.2 & 0.2 & 0.4 \end{pmatrix}$$

Oppgave 9.

$$\lambda^2 - 1.2\lambda + 0.2$$

med røtter $\lambda_1 = 1$ og $\lambda_2 = 0.2$. Det er en sammenheng. De nye egenvektorene blir

$$P \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

hvor den tredje ikke er noen egenvektor. Egenverdiene følger med.