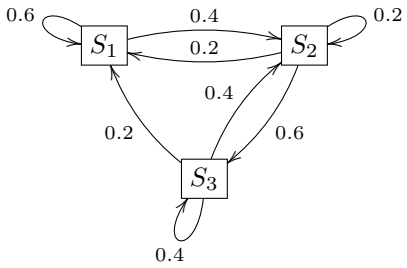
Løsningsforslag, Oblig 2, MAT 1060, våren 2023

Oppgave 1. Et dynamisk system kan illustreres med følgende boks-diagram



Skriv opp den tilhørende overgangsmatrisen til diagrammet og vis at

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 60 \\ 60 \\ 60 \end{pmatrix}$$

er en likevektstilstand for modellen.

Løsning.
Vi kaller overgangsmatrisen M.

$$M = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.2 & 0.2 \\ 0.4 & 0.2 & 0.4 \\ 0 & 0.6 & 0.4 \end{pmatrix}$$

$$M \begin{pmatrix} 60 \\ 60 \\ 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36+12+12 \\ 24+12+24 \\ 0+36+24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ 60 \\ 60 \end{pmatrix}$$

Oppgave 2. La $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ være lineæravbildningen gitt ved $T\mathbf{v} = A\mathbf{v}$ der A er 2×2-matrisen

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Regn ut det karakteristiske polynomet til T og finn egenverdiene.

b) Finn de tilhørende egenvektorene og vis at (eller forklar hvorfor) egenvektorene til A danner en basis for $\mathbb{R}^2$.

Løsning.

a) $\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 3 \\ 4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (-3-\lambda)(1-\lambda) - 3 \cdot 4 = \lambda^2 + 2\lambda - 15$

$\lambda^2 + 2\lambda - 15 = 0$ gir $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -5$.

b)

$$\begin{pmatrix} -3-3 & 3 \\ 4 & 1-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6A+3B \\ 4A-2B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -3+5 & 3 \\ 4 & 1+5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2A+3B \\ 4A+6B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Egenvektorer for ulike egenverdier er alltid lineært uavhengig. Det er to av dem, altså en basis for $\mathbb{R}^2$.

Oppgave 3. En symmetrisk 3×3-matrise er gitt ved

$$Q = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Regn ut determinanten til matrisen.

b) Vis at $Q^2 = Id$.

c) Bruk a) og b) til å vise at Q er ortogonal og at den beskriver en refleksjon i $\mathbb{R}^3$.

Løsning.

a)

$$\det(Q) = \frac{1}{3^3} \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -4-4-4-8+1-8 = -1$$

b) Ordinær matrisemultiplikasjon.

c) Det følger fra b) at $Q = Q^{-1}$. Men Q er symmetrisk, så $Q = Q^T$. Det betyr at $Q^{-1} = Q^T$ og Q er derfor ortogonal. Siden determinanten til Q er -1 vil matrisa beskrive en refleksjon.

Oppgave 4. En isometri i planet er gitt ved

$$T(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{v} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Finn fikspunktmengden til T og avgjør hva slags isometri T er.

b) Regn ut T^2. Hva slags isometri er dette?

c) Hva er ordenen til T?

Løsning.

a) Vi setter $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ og finner fikspunktmengden ved

$$T(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y+1 \\ -x+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

som betyr at linja $x+y=1$ utgjør fikspunktmengden til T. Siden fikspunktmengden er en linje vil T være en refleksjon.

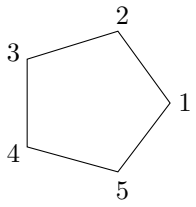
b)

$$\begin{aligned} T^2(\mathbf{v}) &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} T(\mathbf{v}) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{v} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{v} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{v} \end{aligned}$$

Det er identitetsavbildningen.

c) Siden $T \neq Id$ og $T^2 = Id$ har T orden 2.

Oppgave 5. En regulær femkant K er gitt som på figuren



La $\mu = (12345)$ være en rotasjon av K og $\rho = (12)(35)$ være en refleksjon. Vis at $\rho\mu\rho = (15432)$.

Løsning.

$$\begin{aligned}
\rho\mu\rho(1) = \rho\mu(2) = \rho(3) = 5 \\
\rho\mu\rho(2) = \rho\mu(1) = \rho(2) = 1 \\
\rho\mu\rho(3) = \rho\mu(5) = \rho(1) = 2 \\
\rho\mu\rho(4) = \rho\mu(4) = \rho(5) = 3 \\
\rho\mu\rho(5) = \rho\mu(3) = \rho(4) = 4
\end{aligned}$$

som vi skriver (15432).