Anna Sletsjøe
Arne B. Sletsjøe

Oppgavesamling, MAT 1060

Oppgaver til kapittel 1

Oppgave 1. *Tegn følgende vektorer i planet.*

a) $\mathbf{v_1} = (2,1)$

b) $\mathbf{v_2} = (-1,2)$

c) $2\mathbf{v_1}$

d) $\mathbf{v_1} + \mathbf{v_2}$

Oppgave 2. *Regn ut*

a) $(2,1) \cdot (1,1)$

b) $(-1,1) \cdot (-2,-3)$

c) $(3,4) \cdot (3,4)$

d) $\|(\frac{1}{2}, \sqrt{2})\|^2$

Oppgave 3. *Hva er størrelsen til matrisene, både faktorene og produktet, i 4, 17, 20, 21?*

Regn ut produktet av matrise og vektor:

Oppgave 4.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Oppgave 5.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 54 \\ -\frac{1}{17} \end{pmatrix}$$

Oppgave 6.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Oppgave 7.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Oppgave 8.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Oppgave 9.

$$(1,2) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Oppgave 10.

$$(1,1) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Oppgave 11.

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{5}{6}\right) \cdot \begin{pmatrix} 6 & 2 & 4 \\ 6 & 9 & 12 \\ 6 & 6 & 12 \end{pmatrix}$$

Oppgave 12. *a) La*

$$A = \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}$$

og

$$B = \begin{pmatrix} 3 \end{pmatrix}$$

Hva blir $A \cdot B$ og $B \cdot A$.

b) La

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

og

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Regn ut produktene $A \cdot B$ og $B \cdot A$.

c) La

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

og

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Regn ut produktene $A \cdot B$ og $B \cdot A$.

d) La

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

og

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Regn ut produktet $A \cdot B$. Har produktet $B \cdot A$ noen mening?

Utfør regneoperasjonene:

Oppgave 13.

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

Oppgave 14.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Oppgave 15.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Oppgave 16.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & -3 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Regn ut produktet av matrisene:

Oppgave 17.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Oppgave 18.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Oppgave 19.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Oppgave 20.

$$2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Oppgave 21.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Oppgave 22.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

Oppgave 23.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{10} & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Oppgave 24.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$$

Oppgave 25. *La*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}$$

hvor $c \in \mathbb{R}$ er et reelt tall. Finn A^2, A^3 og A^4. Ser du et mønster? Hva blir A^n?

Oppgave 26. *Kombiner hver matrise med riktig begrep, det kan være flere begreper som stemmer for hver matrise.*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}, \; D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

1. Øvre triangulær 2. Nedre triangulær 3. Identitetsmatrise 4. Diagonal 5. Symmetrisk

Oppgave 27. *Gitt to matriser*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \text{ og } B = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -1 \\ -4 & -1 & 1 \\ -5 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Regn ut matriseproduktet $A \cdot B$.

b) Forklar hvorfor $B = A^{-1}$.

c) Hva blir produktet $B \cdot A$ og hvorfor?

d) Regn ut $C = A \cdot A^T$ og forklar hvorfor C blir en symmetrisk matrise.

Oppgave 28. *Gitt to matriser*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ og } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Regn ut matriseproduktene AB, BA og A^2.

b) Finn A^{-1}.

c) La M være en ortogonal matrise som oppfyller $M^2 = I$. Vis at da er M symmetrisk, dvs. $M = M^T$.

Regn ut den inverse til matrisene:

Oppgave 29.

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

Oppgave 30.

$$\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Oppgave 31.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Oppgave 32.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Oppgave 33.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Oppgave 34. *Vis at matrisene*

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

og

$$B = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{2} & 2 & 0 \\ \sqrt{2} & 1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

er ortogonale. Er produktene A^2, AB, BA og B^2 også ortogonale?

Regn ut determinantene:

Oppgave 35.

$$\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$$

Oppgave 36.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Oppgave 37.

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix}$$

Oppgave 38.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Oppgave 39.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & -3 \end{vmatrix}$$

Oppgave 40.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Oppgave 41.

$$\left| \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right|$$

Oppgave 42.

$$\begin{vmatrix} 100 & 200 \\ 50 & 700 \end{vmatrix}$$

Oppgave 43.

$$\left| \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \right|$$

Oppgave 44. *Vi har gitt et likningssystem*

$$\begin{aligned} x - 2y - 3z &= -2 \\ x + y + z &= 3 \\ 2x - y - 2z &= 1 \\ 3x - z &= 4 \end{aligned}$$

Er systemet overbestemt, underbestemt eller bestemt?

Løs likningssystemene:

Oppgave 45.

$$\begin{aligned} 2x + 2y &= 4 \\ -2x - 3y &= -5 \end{aligned}$$

Oppgave 46.

$$\begin{aligned} 4x+8y &= 6 \\ 2x+y &= -3 \end{aligned}$$

Oppgave 47.

$$\begin{aligned} x+3y &= 5 \\ 3x+y &= 7 \end{aligned}$$

Oppgave 48.

$$\begin{aligned} x+2y+3z &= 6 \\ y+2y &= 2 \\ x+6y+2z &= 5 \end{aligned}$$

Oppgave 49.

$$\begin{aligned} x+y-z &= 4 \\ x-2y+3z &= 6 \\ 2x+3y+1z &= 7 \end{aligned}$$

Regn ut det karakteristiske polynomet og finn egenverdiene til matrisene:

Oppgave 50.

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

Oppgave 51.

$$\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Oppgave 52.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Oppgave 53.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Oppgave 54.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Oppgave 55. *La*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Vis at det karakteristiske polynomet er gitt ved

$$\chi_A(\lambda) = -(\lambda-1)(\lambda^2-5\lambda+6)$$

og finn egenverdiene til matrisen. Finn også A^{-1}.

Oppgave 56. *Vis at* 2×2*-matrisene*

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \text{ og } S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

er ortogonale. Faktisk er det slik at alle ortogonale 2×2*-matriser er på formen* R_θ *eller på formen* SR_θ *for passende valg av* $\theta \in [0, 2\pi)$.

Oppgave 57. *La*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Vis at A er invertibel og finn A^{-1}. *Regn ut det karakteristiske polynomet og finn egenverdiene til A.*

Oppgave 58. *La*

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Vis at A er invertibel og finn A^{-1}. *Regn ut det karakteristiske polynomet og finn egenverdiene til A.*

Oppgave 59. *En* 2×2*-matrise A er gitt ved*

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Regn ut S^{-1}.

b) Vis at S er en ortogonal matrise.

c) Regn ut determinanten til S.

d) Finn en likevektstilstand for S.

Oppgave 60. *En* 2×2*-matrise er gitt ved*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Regn ut determinanten til A.

b) Finn A^{-1}

c) Et lineært likningssystem er gitt ved

$$\begin{aligned} x-y &= 2 \\ -x+3y &= 4 \end{aligned}$$

Bruk b) til å løse likningsystemet.

d) Regn ut A^2.

Vi har at

$$A\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\10\end{pmatrix}$$

e) Løs det lineære likningssystemet

$$A^2\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\10\end{pmatrix}$$

Oppgave 61. *En 2×2-matrise er gitt ved*

$$A=\begin{pmatrix}4&-2\\3&-1\end{pmatrix}$$

a) Regn ut determinanten til A.

b) Finn A^{-1}

c) Et lineært likningssystem er gitt ved

$$\begin{aligned}4x-2y&=2\\3x-y&=2\end{aligned}$$

Bruk b) til å løse likningsystemet.

d) Regn ut A^2+2I.

e) Løs det lineære likningssystemet

$$(A^2+2I)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\6\end{pmatrix}$$

Oppgave 62. *En 3×3-matrise er gitt ved*

$$M=\begin{pmatrix}1&-1&2\\2&-2&2\\1&-\frac{1}{2}&0\end{pmatrix}$$

a) Regn ut determinanten til M.

b) Vis at $M^2=I$.

c) Løs det lineære likningssystemet

$$\begin{aligned}x-y+2z&=1\\2x-2y+2z&=4\\x-\frac{1}{2}y&=-1\end{aligned}$$

Oppgave 63. *La*

$$\mathbf{v}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

Regn ut Householder-transformasjonen $Q_{\mathbf{v}}$ tilordnet denne vektoren. Vis at $Q_{\mathbf{v}}(\mathbf{v})=-\mathbf{v}$. La så

$$\mathbf{w}=\begin{pmatrix}0\\a\\b\end{pmatrix}$$

For reelle tall $a,b\in\mathbb{R}$. Vis at $Q_{\mathbf{v}}(\mathbf{w})=\mathbf{w}$.

Oppgave 64. *En 3×3-matrise er gitt ved*

$$A=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&-2&2\\-2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$$

Vi skal vise at A er en Householder-matrise.

a) Regn ut determinanten til A.

b) Vis at $A^2=I$.

c) Finn det karakteristiske polynomet til A og regn ut egenverdiene.

d) La $\mathbf{w}$ være en vilkårlig vektor og regn ut $\tilde{\mathbf{w}}=\mathbf{w}-A\mathbf{w}$. Vis at

$$A\tilde{\mathbf{w}}=-\tilde{\mathbf{w}}$$

e) Vis at A er Householder-matrisen til $\tilde{\mathbf{w}}$, i.e. $A=Q_{\tilde{\mathbf{w}}}$.

Oppgave 65. *En 3×3-matrise er gitt ved*

$$A=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}1&-4&8\\-4&7&4\\8&4&1\end{pmatrix}$$

Vi skal vise at A er en Householder-matrise.

a) Hva er symmetrisk matrise? Er A symmetrisk?

b) Regn ut determinanten til A.

c) Vis at $A^2=I$.

d) Finn det karakteristiske polynomet til A og regn ut egenverdiene.

d) La $\mathbf{w}$ være en vilkårlig vektor og regn ut $\tilde{\mathbf{w}}=\mathbf{w}-A\mathbf{w}$. Vis at A er Householder-matrisen til $\tilde{\mathbf{w}}$, i.e. $A=Q_{\tilde{\mathbf{w}}}$.

Oppgave 66. *En 3×3-matrise er gitt ved*

$$A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

a) Regn ut determinanten til A.

b) Finn det karakteristiske polynomet til A og regn ut egenverdiene.

d) La $\mathbf{w}$ *være en vilkårlig vektor og regn ut* $\tilde{\mathbf{w}} = A^2\mathbf{w} - 3A\mathbf{w} + 2\mathbf{w}$. *Vis at* $A\tilde{\mathbf{w}} = \mathbf{0}$.

Oppgave 67. *La*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0.8 & 0.6 \\ -0.8 & -0.36 & 0.48 \\ -0.6 & 0.48 & -0.64 \end{pmatrix}$$

a) Vis at A er en ortogonal matrise ved å regne ut skalarproduktet mellom søylene.

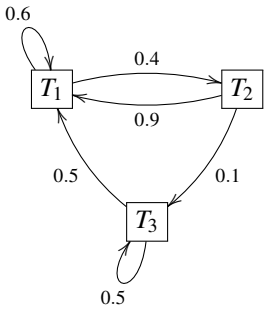
b) Bruk egenskapen $A^{-1} = A^T$ *til ortogonale matriser til å øse det lineære likningssystemet*

$$\begin{aligned} 0.8x_2 + 0.6x_3 &= 5 \\ -0.8x_1 - 0.36x_2 + 0.48x_3 &= 0 \\ -0.6x_1 + 0.48x_2 - 0.64x_3 &= 0 \end{aligned}$$

.

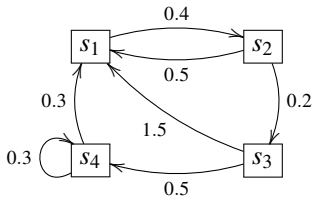
Oppgaver til kapittel 2

Oppgave 68. *En modell er gitt som i illustrasjonen.*



Still opp den tilhørende overgangsmatrisen.

Oppgave 69. *Vi betrakter et system bestående av 4 størrelser, s_1, s_2, s_3, s_4:*



Still opp den tilhørende overgangsmatrisen.

Oppgave 70. *Gitt en overgangsmatrise*

$$M = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.4 & 0.1 \\ 0.2 & 0.3 & 0 \\ 0.5 & 0.7 & 0.9 \end{pmatrix}$$

Tegn et boksdiagram som svarer til denne overgangsmatrisen.

Oppgave 71. *Gitt en overgangsmatrise*

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Tegn et boksdiagram som svarer til denne overgangsmatrisen.

Oppgave 72. *En dynamisk modell er gitt ved*

$$\mathbf{x}_{n+1} = M \cdot \mathbf{x}_n$$

der M er en 2×2-matrise gitt ved

$$M = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}$$

og $\mathbf{x}_i$ er en 2-søylevektor.

a) Gitt en tilstandsfordeling

$$\mathbf{x}_n = \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \end{pmatrix}$$

Hva blir $\mathbf{x}_{n+1}$?

b) Regn ut M^2.

c) Vi finner likevektstilstander ved å sette $\mathbf{y}_{t+1} = \mathbf{y}_t$. Finn en slik likevektstilstand $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ slik at

$$\mathbf{u} = M \cdot \mathbf{u}$$

og der $u_1 + u_2 = 300$.

Oppgave 73. *En dynamisk modell er gitt ved*

$$\mathbf{x}_{n+1} = M \cdot \mathbf{x}_n$$

der M er en 3×3-matrise gitt ved

$$M = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.8 \end{pmatrix}$$

og $\mathbf{x}_i$ er en 3-søylevektor.

a) Gitt en tilstandsfordeling

$$\mathbf{x}_n = \begin{pmatrix} 300 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Hva blir $\mathbf{x}_{n+1}$?

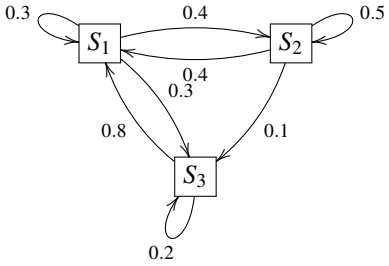
b) Regn ut M^2.

c) Vi finner likevektstilstander ved å sette $\mathbf{y}_{t+1} = \mathbf{y}_t$. Finn en slik likevektstilstand $\mathbf{u}$ slik at

$$\mathbf{u} = M \cdot \mathbf{u}$$

og der $u_1 + u_2 + u_3 = 300$.

Oppgave 74. *Et dynamisk system kan illustreres med følgende boks-diagram*



a) Skriv opp den tilhørende overgangsmatrisen til diagrammet.

b) Gitt en tilstandsvektor

$$\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ 100 \end{pmatrix}$$

Hva blir $\mathbf{x}_1$*?*

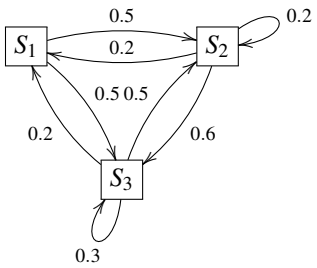
c) Regn ut M^2 *og bruk det til å regne ut* x_2*.*

c) Vi finner likevektstilstander ved å sette $\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{x}_t$*. Finn en slik likevektstilstand* $\mathbf{x}$ *slik at*

$$\mathbf{x} = M \cdot \mathbf{x}$$

og der $x_1 + x_2 + x_3 = 91$*.*

Oppgave 75. *Et dynamisk system kan illustreres med følgende boks-diagram*



a) Skriv opp den tilhørende overgangsmatrisen til diagrammet.

b) Gitt en tilstandsvektor

$$\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ 100 \end{pmatrix}$$

Hva blir $\mathbf{x}_1$*?*

c) Regn ut M^2 *og bruk det til å regne ut* $\mathbf{x}_2$*.*

c) Vis at

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 26 \\ 60 \\ 70 \end{pmatrix}$$

er en likevektstilstand for modellen.

Oppgave 76. *En dynamisk modell er gitt ved*

$$\mathbf{x}_{n+1} = M \cdot \mathbf{x}_n$$

der M er en 3×3*-matrise gitt ved*

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0.4 & 0.2 \\ 0 & 0.6 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0.6 \end{pmatrix}$$

og $\mathbf{x}_i$ *er en 3-søylevektor.*

a) Tegn et boks-diagram som illustrerer modellen.

b) Gitt en tilstandsvektor

$$\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 100 \end{pmatrix}$$

Hva blir $\mathbf{x}_1$*?*

c) Regn ut M^2 *og bruk det til å regne ut* $\mathbf{x}_2$*.*

d) Vi finner likevektstilstander ved å sette $\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{x}_t$*. Finn en likevektstilstand* $\mathbf{x}$ *slik at*

$$\mathbf{x} = M \cdot \mathbf{x}$$

og der $x_1 + x_2 + x_3 = 100$*.*

Oppgave 77. *En populasjon av øyenstikkere holder til i to dammer. Hver dag flytter 20% av øyenstikkerne i dam A seg til dam B, mens 30% av de i dam B flytter seg til dam A. Resten blir værende, og ingen forsvinner eller kommer til. Hvis vi lar* a_t *betegne antall øyenstikkere i dam A på dag t og* b_t *tilsvarende i dam B, så vil systemet kunne beskrives ved modellen*

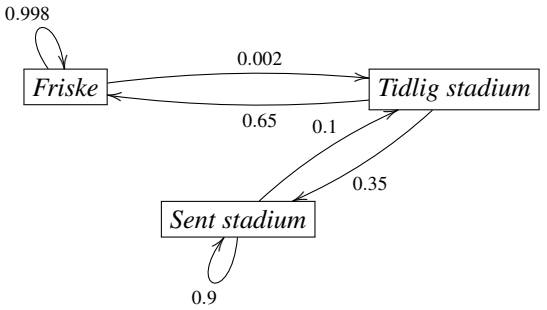
$$\begin{pmatrix} a_{t+1} \\ b_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix}$$

La M være overgangsmatrisen i modellen over. Regn ut (for hånd) M^2 *og* M^3*. Hvis vi starter med*

$$\mathbf{v}_0 = \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \end{pmatrix}$$

hva blir da $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$? Vi er interessert i å finne ut hva som skjer med fordelingen mellom de to dammene i det lange løp. Vil forløpet være avhengig av den opprinnelige tilstandsvektoren?

Oppgave 78. *Vi studerer en populasjon av kvinner og deres risiko for å utvikle brystkreft. Vi deler populasjonen i tre grupper (tilstander), friske, pasienter i tidlig stadium og pasienter i sent stadium. Hvert år vil 0.2% av de friske kvinnene utvikle tidlig-stadium kreft. Resten forblir friske. Av pasientene i et tidlig stadium vil 65% blir friskmeldt i løpet av året, mens resten utvikler sykdommen til et sent stadium. Av kvinnene i den sene stadiet vil 10% ved hjelp av behandling bli brakt tilbake til en tidlig stadium tilstand, mens 90% forblir i det sene stadiet. Ingen går direkte fra et sent stadium av sykdommen til å bli frisk på et år. Modellen kan vi illustrere på denne måten*



Still opp den tilhørende overgangsmatrisen. Hvor stor andel vil etter hvert være i de ulike stadiene? Vil det være avhengig av hva som er utgangspunktet?

Oppgave 79. *Vi skal se på en modell for aldersfordeling hos ferskvannsfisken gulabbor. Vi tenker oss at i en populasjon er det ingen av individene som blir mer enn 4 år. Kun 5% av 1-åringene overlever til de blir 2 år, 20% overlever fra 2 til 3 år og 75% fra 3 til 4. De to eldste klassene produserer nye fisker, henholdsvis 100 og 150 i året pr. individ. Vi kan formulere modellen slik, der $n_{k,t}$ indikerer antall individer i aldersgruppe k ved tiden t.*

$$
\begin{aligned}
n_{1,t+1} &= 100n_{3,t} + 150n_{4,t} \\
n_{2,t+1} &= 0.05n_{1,t} \\
n_{3,t+1} &= 0.2n_{2,t} \\
n_{4,t+1} &= 0.75n_{3,t}
\end{aligned}
$$

Skriv opp overgangsmatrisen P og tegn en figur som illustrerer modellen. Regn ut P^2. Dersom vi setter

$$
\mathbf{v}_0 = \begin{pmatrix} 10000 \\ 1000 \\ 500 \\ 300 \end{pmatrix}
$$

hva blir da $\mathbf{v}_1$? Finn ut hvordan aldersfordelingen blir i det lange løp.

Oppgave 80. *En medisinsk preparat inntas gjennom munnen og absorberes til blodbanen via magesekken. La s_t være mengden av preparatet i magen ved tiden t, og b_t den mengden som er absorbert i blodet. For hvert tidsintervall er 50% av preparatet absorbert fra magesekken til blodbanen, og 80% av preparatet i blodbanen er metabolisert.*

Still opp en modell, inkludert figur, overgangsmatrise og likningssett. Analyser tidsforløpet av modellen.

Oppgave 81. *N studenter sitter rundt et rundt bord og spiller følgende spill: De bestemmer seg for hvert sitt tall $0 < p_j < 1$, uten å fortelle de andre hva tallet er. Hver spiller har utdelt en kapital, verdsatt til 1. Ved hver runde i spillet skal spiller j gi personen til høyre en andel p_j av den kapitalen hun på dette tidspunktet har til rådighet. Resten av kapitalen skal hun gi til personen på venstre side. Slik fortsetter spillet. På bakgrunn av det man stadig vekk mottar, er det om å gjøre å avdekke verdien på alle p_j.*

Hvordan vil fordelingen av kapital rundt bordet være, basert på alle de individuelle p_j-ene?

Oppgaver til kapittel 3

Skriv $\mathbf{w}$ som en lineær kombinasjon av $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ (og $\mathbf{v}_3$):

Oppgave 82.

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Oppgave 83.

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Oppgave 84.

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

og

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Oppgave 85.

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

og

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Finnes det noen lineær avhengighet mellom vektorene:

Oppgave 86.

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Oppgave 87.

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Oppgave 88.

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Oppgave 89.

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Oppgave 90. *Vis at*

$$\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$$

danner en basis for $\mathbb{R}^2$.

Oppgave 91. *Vis at*

$$\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\}$$

danner en basis for $\mathbb{R}^2$.

Oppgave 92. *Vis at*

$$\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$$

danner en basis for $\mathbb{R}^3$.

Oppgave 93. *Vis at*

$$\{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\}$$

danner en basis for $\mathbb{R}^3$.

Oppgave 94. *Vis at*

$$\{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$$

danner en basis for $\mathbb{R}^3$.

Oppgave 95. *Hva er dimensjonen til vektorrommet generert av*

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Finn rangen til matrisene:

Oppgave 96.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Oppgave 97.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Oppgave 98.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Oppgave 99.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Oppgave 100.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Oppgave 101.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Oppgave 102. *Vis at mengden*

$$V = \{(a,b,0) \in \mathbb{R}^3 \,|\, a,b \in \mathbb{R}\}$$

danner et vektorrom.

Oppgave 103. *La V være mengden av funksjoner $f(x)$ definert på intervallet $[-1,1]$ slik at $f(0) = 0$. Vis at mengden danner et vektorrom.*

Oppgave 104. *La $\mathbf{w}$ være en søylevektor. Vis at mengden av søylevektorer $\mathbf{v}$ som oppfyller $\mathbf{v}^T\mathbf{w} = 0$ danner et vektorrom.*

Oppgave 105. *La V_1 og V_2 være underrom av $\mathbb{R}^n$.*

a) Vis at $V_1 \cap V_2$ også er et underrom av $\mathbb{R}^n$.

b) Vis ved et eksempel at $V_1 \cup V_2$ ikke nødvendigvis er et underrom av $\mathbb{R}^n$.

Oppgave 106. *Balanser reaksjonslikningen*

$$Cu + H_2O + SO_2 + O_2 \to Cu_3(OH)_4SO_4$$

Oppgave 107. *Balanser reaksjonslikningen*

$$PbN_6 + CrMn_2O_2 \to Pb_3O_4 + Cr_2O_3 + MnO_2 + NO$$

Oppgave 108. *Vis at mengden $\{x, x^2, x^3\}$ av polynomfunksjoner er lineært uavhengig.*

Oppgave 109. *Forklar hvorfor mengden $\{\sin^2 x, \cos^2 x, 1\}$ er lineært avhengig.*

Oppgave 110. *Vis at*

$$\{1, x+1, x^2+2x+1\}$$

danner en basis for $\mathscr{P}_2$.

Oppgave 111. *Hva er dimensjonen til vektorrommet generert av*

$$\cos 2t, \cos^2 t, \sin^2 t, 1$$

Avgjør om følgende avbildninger er lineære:

Oppgave 112. $T(x,y) = (x, 2y, x-y)$

Oppgave 113. $T(x,y) = (xy, x+y)$

Oppgave 114. $T(x,y) = (x,y,1)$

Regn ut nullrommet til matrisene:

Oppgave 115.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Oppgave 116.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Oppgave 117.

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Oppgave 118.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Oppgave 119.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{6} \\ 3 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

Oppgave 120.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Regn ut nullrommet til lineæravbildningene:

Oppgave 121. $T(x,y) = x - y$

Oppgave 122. $T(x_1,x_2,x_3) = (x_1 - x_2, x_2 - x_3)$

Oppgave 123. $T(x,y) = x$

Oppgave 124. $T(x_1,x_2,x_3) = (x_1 - 2x_2, x_2 - x_3, x_3 - x_2)$

Oppgave 125. $T(f(x)) = xf'(x) - f(x)$, $f(x) \in \mathscr{P}_3$

Oppgave 126. *Regn ut nullrommet til matrisen*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

og forklar hvorfor matrisen er invertibel.

Oppgave 127. *Vi har gitt en lineæravbildning $T : V \to W$. Vi vet at dimensjonen til nullrommet til T er 5 og rangen til T er 3. Hva er dimensjonen til V? Kan vi si noe om dimensjonen til W?*

Oppgave 128. *Derivasjonsoperatoren $D : \mathscr{P}_n \to \mathscr{P}_n$ har 1-dimensjonalt nullrom, generert av de konstante polynomene. Vi vet at dimensjonen til $\mathscr{P}_n$ er $n+1$. Hva er rangen til derivasjonsoperatoren i dette tilfellet?*

Oppgave 129. *Vi har gitt en avbildning $T : \mathscr{P}_2 \to \mathscr{P}_2$ gitt ved $f(x) \mapsto \frac{1}{2}xf'(x)$.*

a) Vis at T er en lineæravbildning.

b) Et vilkårlig element i $\mathscr{P}_2$ kan skrives på formen $f(x) = ax^2 + bx + c$. Finn et uttrykk for $T(ax^2 + bx + c)$.

c) Finn en egenfunksojn for operatoren T.

Oppgave 130. *La $a \in \mathbb{R}$ være et reelt tall. Vis at* ***evalueringsavbildningen***

$$ev_a : \mathscr{P}_2 \to \mathbb{R}$$

gitt ved $ev_a(f(x)) = f(a)$ er en lineær avbildning.

Oppgave 131. *La $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$ være et lukket og begrenset intervall. La $C(I)$ være mengden av kontinuerlige funksjoner definert på intervallet I. Vis at integrasjonsavbildningen*

$$\int : C(I) \to \mathbb{R}$$

gitt ved $f(x) \mapsto \int_a^b f(x)\,dx$ er en lineær avbildning.

Oppgave 132. *La A være en 2×2-matrise gitt ved*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

a) Regn ut det karakteristiske polynomet til A og finn egenverdiene.

b) Finn egenvektorene til A og vis at de danner en basis for $\mathbb{R}^2$.

Oppgave 133. *La A være en 2×2-matrise gitt ved*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Regn ut det karakteristiske polynomet til A og finn egenverdiene.

b) Finn egenvektorene til A. Danner de en basis for $\mathbb{R}^2$?

Oppgave 134. *Vi har gitt tre vektorer*

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},\ \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},\ \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

a) Vis at mengden $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ er lineært avhengig og finn en lineær avhengighet mellom de tre vektorene.

b) Vi lar de tre vektorene være søylene i en 3×3-matrise M.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

Vis at determinanten er 0 og forklar sammenhengen med resultatet i a).

c) La V være vektorrommet utspent av $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$. Finn en vektor i $\mathbb{R}^3$ som ikke ligger i V.

Oppgave 135. *Vi har gitt tre vektorer*

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Vi lar de tre vektorene være søylene i en 3×3-matrise M.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Regn ut determinanten til M.

b) Begrunn hvorfor mengden $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ er lineært avhengig og finn en lineær avhengighet mellom de tre vektorene.

c) La V være vektorrommet utspent av $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$. Finn en vektor i $\mathbb{R}^3$ som ikke ligger i V. Hva er dimensjonen til vektorrommet V?

Oppgave 136. *Vi har gitt tre vektorer*

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Begrunn hvorfor mengden $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ er lineært avhengig.

b) Vis at alle mulige utvalg av to av de tre vektorene $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ vil gi oss lineært uavhengige mengder.

c) La V være vektorrommet utspent av $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$. Hva er dimensjonen til dette vektorrommet?

Oppgave 137. *La V være vektorrommet utspent av*

$$\mathscr{B} = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \}$$

a) Vis at mengden $\mathscr{B}$ er lineært uavhengig.

b) Forklar hvorfor $\mathscr{B}$ danner en basis for $\mathbb{R}^3$.

c) La

$$\mathscr{B}' = \{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \}$$

Forklar hvorfor $\mathscr{B}$ og $\mathscr{B}'$ genererer samme vektorrom.

d) La

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

være søylene i en 3×3-matrise. Forklar hvorfor matrisen er invertibel.

Oppgave 138. *La V være vektorrommet utspent av*

$$\mathscr{B} = \{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \}$$

a) Vis at mengden $\mathscr{B}$ er lineært uavhengig.

b) Forklar hvorfor $\mathscr{B}$ danner en basis for $\mathbb{R}^2$.

c) La

$$\mathscr{S} = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}$$

Forklar hvorfor $\mathscr{B}$ og $\mathscr{S}$ genererer samme vektorrom.

d) La

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

være søylene i en 2×2-matrise. Hva er rangen til denne matrisen? Og dimensjonen til nullrommet?

Oppgave 139. *La V være vektorrommet utspent av*

$$\mathscr{B} = \{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \}$$

a) Vis at mengden $\mathscr{B}$ er lineært uavhengig.

b) Forklar hvorfor $\mathscr{B}$ ikke danner en basis for $\mathbb{R}^3$.

c) La

$$\mathscr{C} = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \}$$

Forklar hvorfor $\mathscr{B}$ og $\mathscr{C}$ genererer samme vektorrom.

d) La

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

være søylene i en 3×3-matrise. Hva er rangen til denne matrisen? Og dimensjonen til nullrommet?

Oppgave 140. *I denne oppgaven lar vi $\mathscr{P}_2$ betegne vektorrommet av polynomer av grad mindre enn eller lik 2.*

a) Vis at 1, $x + \frac{1}{2}$ og $x^2 - x + \frac{1}{6}$ danner en lineært uavhengige mengde i $\mathscr{P}_2$,

b) Vis at $\mathscr{B} = \{1, x + \frac{1}{2}, x^2 - x + \frac{1}{6}\}$ gir en basis for $\mathscr{P}_2$,

c) La $D : \mathscr{P}_2 \to \mathscr{P}_2$ være derivasjonsoperatoren $D(f(x)) = f'(x)$. Skriv opp matrisen $[D]_{\mathscr{B}}$ til D relativt til basisen $\mathscr{B}$,

d) Hvor stor er rangen til D, og hva er dimensjonen til nullrommet?

Oppgave 141. *I denne oppgaven lar vi $V = \langle e^x, e^{-x} \rangle$.*

a) Vis at $\frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ og $\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ danner en lineært uavhengige mengde i $\mathscr{P}_2$,

b) Vis at $\mathscr{B} = \{\frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})\}$ gir en basis for V,

c) *La $D : V \to V$ være derivasjonsoperatoren $D(f(x)) = f'(x)$. Vis at operatoren faktisk er en avbildning fra V inn i V.*

d) *Finn en egenfunksjon for D i rommet V.*

Oppgave 142. *La $V = \langle \cos x, \cos 2x, \cos 3x, \dots \rangle$.*

a) *Vis at for alle positive hele tall $m \neq n$ så er $\{\cos nx, \cos mx\}$ lineært uavhengig.*

b) *Vis at Laplaceoperatoren $\Delta = D^2$ er en lineær operator på vektorrommet V, det vil si lineær og $\Delta(\mathbf{v}) \in V$ for alle $\mathbf{v} \in V$. (Definisjonen av Δ er gitt ved $\Delta(f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ for en funksjon $f \in V$)*

c) *Finn dimensjonen til nullrommet til Δ som operator på V.*

Oppgave 143. *I denne oppgaven lar vi $\mathscr{P}_2$ betegne vektorrommet av polynomer av grad mindre enn eller lik 2.*

a) *Definer en lineæravbildning $E : \mathscr{P}_2 \to \mathbb{R}^3$ ved*

$$E(f(x)) = \begin{pmatrix} f(0) \\ f(1) \\ f(2) \end{pmatrix}$$

Hvis vi bruker basisen $\mathscr{B} = \{1, x, x^2\}$ for $\mathscr{P}_2$ og standardbasisen for $\mathbb{R}^3$, hva blir da matrisen $[E]$ til E?

b) *Finn rangen og nullrommet til $[E]$.*

Oppgave 144. *I denne oppgaven lar vi $V = \langle e^x, e^{-x} \rangle$ og $W = \mathbb{R}^2$.*

a) *Definer en lineæravbildning $T : V \to W$ ved $T(e^x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ og $T(e^{-x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Finn nullrommet og rangen til denne avbildningen.*

b) *La nå $S : W \to V$ være avbildningen gitt ved $S(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = e^x$ og $S(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = e^{-x}$. Vis at $S \circ T$ og $T \circ S$ er identitetsavbildningene på henhodsvis V og W.*

Oppgave 145. *La $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ være gitt ved $T(x) = (x, 2x, 3x)$.*

a) *Vis at nullrommet til T er (0). Hva blir rangen til T?*

b) *Definer en lineæravbildning $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ved $S(x_1, x_2, x_3) = x_1 - 2x_2 + x_3$. Finn rangen og nullrommet til S.*

c) *?Betrakt så de sammensatte avbildningene $S \circ T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ og $T \circ S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Finn rangen og nullrommene til disse to avbildningene.*

Oppgave 146. *La $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ være lineæravbildningen gitt ved $T\mathbf{v} = A\mathbf{v}$ der A er 2×2-matrisen*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

a) *Regn ut det karakteristiske polynomet til T og finn egenverdiene.*

b) *Finn de tilhørende egenvektorene.*

c) *Vis at egenvektorene til A danner en basis for $\mathbb{R}^2$.*

d) *La $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Skriv $\mathbf{w}$ som en lineær kombinasjon av egenvektorer for A.*

e) *Regn ut $T(\mathbf{w})$ og $T(T(\mathbf{w}))$. Finn et uttrykk for $T^n(\mathbf{w})$ for en vilkårlig n. Vi skriver $T^n(x)$ for sammensetningen $T \circ T \circ T \circ \cdots \circ T$ (n ganger).*

Oppgave 147. *La $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ være lineæravbildningen gitt ved $T\mathbf{v} = A\mathbf{v}$ der A er 2×2-matrisen*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

a) *Regn ut det karakteristiske polynomet til T og finn egenverdiene.*

b) *Finn de tilhørende egenvektorene.*

c) *Vis at egenvektorene til A danner en basis for $\mathbb{R}^2$.*

d) *La $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Skriv $\mathbf{w}$ som en lineær kombinasjon av egenvektorer for A.*

e) *Regn ut $T(\mathbf{w})$ og $T(T(\mathbf{w}))$. Finn et uttrykk for $T^n(\mathbf{w})$ for en vilkårlig n. Vi skriver $T^n(x)$ for sammensetningen $T \circ T \circ T \circ \cdots \circ T$ (n ganger).*

Oppgave 148. *La $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ være lineæravbildningen gitt ved $T\mathbf{v} = A\mathbf{v}$ der A er 2×2-matrisen*

$$A = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.2 \\ 0.5 & 0.8 \end{pmatrix}$$

a) Regn ut det karakteristiske polynomet til T og finn egenverdiene.

b) Finn de tilhørende egenvektorene.

c) Vis at egenvektorene til A danner en basis for $\mathbb{R}^2$.

d) La $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Skriv $\mathbf{v}$ som en lineær kombinasjon av egenvektorer for A.

e) Regn ut

$$\lim_{n\to\infty} A^n \mathbf{v}$$

f) Kan du finne en vektor $\mathbf{w}$ slik at

$$\lim_{n\to\infty} A^n \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Fasit

Fasit til oppgaver, kapittel 1

Oppgave 1. -
Oppgave 2. a) 3 b) -1 c) 25 d) $\frac{3}{2}$
Oppgave 3.

4 : 2×2, 2×1, 2×1

17 : 2×2, 2×2, 2×2

20 : 3×4, 4×3, 3×3

21 : 3×3, 3×4, 3×4

Oppgave 4.

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Oppgave 5.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Oppgave 6.

$$\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Oppgave 7.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Oppgave 8.

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Oppgave 9.

$$(1,2)$$

Oppgave 10.

$$(1,3)$$

Oppgave 11.

$$(10,9,16)$$

Oppgave 12.

a)

$$AB = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 & 2 \\ 4 & 0 & 0 & 6 \\ 8 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, BA = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$$

b)

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Produktet $B \cdot A$ har ingen mening.

c)

$$AB = (2),\ BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

d) $AB = BA = (6)$

Oppgave 13.

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Oppgave 14.

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Oppgave 15.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Oppgave 16.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Oppgave 17.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Oppgave 18.

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Oppgave 19.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Oppgave 20.

$$\begin{pmatrix} 4 & -4 & 6 \\ 6 & -6 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Oppgave 21.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Oppgave 22.

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Oppgave 23.

$$\begin{pmatrix} \frac{11}{2} & \frac{17}{2} \\ \frac{-4}{5} & 3 \end{pmatrix}$$

Oppgave 24.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}$$

Oppgave 25.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2c & 1 \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3c & 1 \end{pmatrix}, A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ nc & 1 \end{pmatrix}$$

Oppgave 26. A - 1,2,3,4,5 B - 1 C - 2 D - 5

Oppgave 27. a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ c) $BA = I$

Oppgave 28. a) $A^2 = I$, $AB = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 1 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$,

$BA = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ b) $A^{-1} = A$

Oppgave 29.

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Oppgave 30.

$$-\frac{1}{12}\begin{pmatrix} 1 & -8 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Oppgave 31.

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Oppgave 32.

$$-\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Oppgave 33.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Oppgave 34. Produktet av to ortogonale matriser er en ortogonal matrise fordi

$$(PQ)^{-1} = Q^{-1}P^{-1} = Q^T P^T = (PQ)^T$$

Oppgave 35. 22
Oppgave 36. 2
Oppgave 37. 1
Oppgave 38. -1
Oppgave 39. 0
Oppgave 40. 1
Oppgave 41. 44
Oppgave 42. 60000
Oppgave 43. $\frac{1}{4}$
Oppgave 44. Underbestemt
Oppgave 45. $x = 1, y = 1$
Oppgave 46. $x = -\frac{5}{2}, y = 2$
Oppgave 47. $x = 2, y = 1$
Oppgave 48. $x = 3, y = 0, z = 1$
Oppgave 49. $x = 1, y = 2, z = -1$
Oppgave 50. $\lambda^2 + \lambda - 2$, Egenverdier: 1 og -2
Oppgave 51. $\lambda^2 - 5\lambda - 12$, Egenverdier: $\frac{5 \pm \sqrt{73}}{2}$
Oppgave 52. $\lambda^2 - \lambda - 1$, Egenverdier: $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$
Oppgave 53. $\lambda^2 - 2\lambda - 8$, Egenverdier: 4 og -2
Oppgave 54. $\lambda^2 - 1$, Egenverdier: 1 og -1
Oppgave 55.

$$A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Oppgave 56. -
Oppgave 57.

$$\det(A) = 4 \neq 0 \quad A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda^2 - 5\lambda + 4$$

Egenverdier: 1 og 4
Oppgave 58.

$$\det(A) = 1 \quad A^{-1} = A$$

$$\chi_A(\lambda) = -\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda + 1$$

Egenverdier: 1 og -1

Oppgave 59. a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ b) -1 c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Oppgave 60. a) 2 b) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$
d) $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 10 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$

Oppgave 61. a) 2 b) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
d) $\begin{pmatrix} 12 & -6 \\ 9 & -3 \end{pmatrix}$ e) $x = y = 1$

Oppgave 62. a) 1 c) -1

Oppgave 63

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Oppgave 64. a) -1 c) $-\lambda^3+\lambda^2+\lambda-1$, $\lambda_1 = 1$ (multiplisitet 2), $\lambda_2 = -1$

Oppgave 65. a) A symmetrisk b) -1
d) $-\lambda^3+\lambda^2+\lambda-1$

Oppgave 66. a) 0 b) $-\lambda^3+\frac{3}{2}\lambda^2-\frac{1}{2}\lambda$

Oppgave 67. b) $x = 0$, $y = 4$, $z = 3$

Fasit til oppgaver, kapittel 2

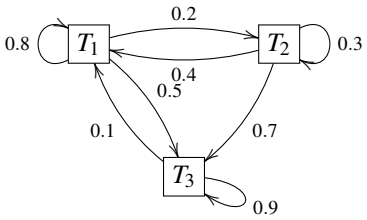
Oppgave 68.

$$\begin{pmatrix} 0.6 & 0.9 & 0.5 \\ 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0.5 \end{pmatrix}$$

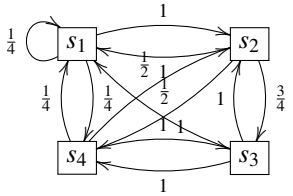
Oppgave 69.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 1.5 & 0.3 \\ 0.4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.3 \end{pmatrix}$$

Oppgave 70.



Oppgave 71.



Oppgave 72. a) $\begin{pmatrix} 120 \\ 180 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 0.68 & 0.32 \\ 0.32 & 0.68 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 150 \\ 150 \end{pmatrix}$

Oppgave 73. a) $\begin{pmatrix} 240 \\ 30 \\ 30 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 0.66 & 0.17 & 0.17 \\ 0.17 & 0.66 & 0.17 \\ 0.17 & 0.17 & 0.66 \end{pmatrix}$
c) $\begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ 100 \end{pmatrix}$

Oppgave 74. a) $\begin{pmatrix} 0.3 & 0.4 & 0.8 \\ 0.4 & 0.5 & 0 \\ 0.3 & 0.1 & 0.2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 150 \\ 90 \\ 60 \end{pmatrix}$
c) $\begin{pmatrix} 129 \\ 105 \\ 66 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 40 \\ 32 \\ 19 \end{pmatrix}$

Oppgave 75. a) $\begin{pmatrix} 0 & 0.2 & 0.2 \\ 0.5 & 0.2 & 0.5 \\ 0.5 & 0.6 & 0.3 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 40 \\ 120 \\ 140 \end{pmatrix}$
c) $\begin{pmatrix} 52 \\ 114 \\ 134 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 26 \\ 60 \\ 70 \end{pmatrix}$

Oppgave 76. b) $\begin{pmatrix}20\\20\\60\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}40\\24\\36\end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix}100\\0\\0\end{pmatrix}$

Oppgave 77.

$$M^2 = \begin{pmatrix}0.7 & 0.45\\0.3 & 0.55\end{pmatrix}, \quad M^3 = \begin{pmatrix}0.65 & 0.525\\0.35 & 0.475\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix}110\\90\end{pmatrix} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix}117.5\\112.5\end{pmatrix}$$

Avhengig av summen av komponentene.

Oppgave 78.

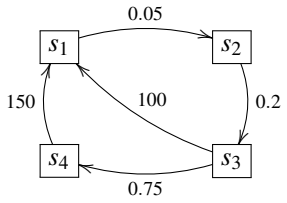
$$\begin{pmatrix}0.998 & 0.65 & 0\\0.002 & 0 & 0.1\\0 & 0.35 & 0.9\end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_\infty = \begin{pmatrix}650\\2\\7\end{pmatrix}$$

Forrdelingen vil være uavhengig av startverdi.

Oppgave 79.

$$P = \begin{pmatrix}0 & 0 & 100 & 150\\0.05 & 0 & 0 & 0\\0 & 0.2 & 0 & 0\\0 & 0 & 0.75 & 0\end{pmatrix}$$

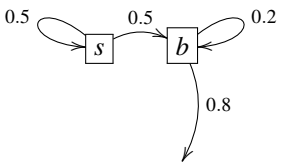
$$P^2 = \begin{pmatrix}0 & 20 & 112.5 & 0\\0 & 0 & 5 & 7.5\\0.01 & 0 & 0 & 0\\0 & 0.15 & 0 & 0\end{pmatrix}$$



$$\mathbf{v}_0 = \begin{pmatrix}95000\\500\\200\\375\end{pmatrix}$$

Etter hvert blir fordelingen mellom komponentene (ca.) 4300:174:28:17

Oppgave 80.



$$\begin{pmatrix}0.5 & 0\\0.5 & 0.2\end{pmatrix}$$

$$s_{t+1} = 0.5s_t$$
$$b_{t+1} = 0.5s_t + 0.2b_t$$

Preparatet forsvinner etter hvert ut, men vil etter hvert fordele seg med forholdet $s : b = 3 : 5$.

Fasit til oppgaver, kapittel 3

Oppgave 82. $\mathbf{w} = -\mathbf{v}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{v}_2$
Oppgave 83. $\mathbf{w} = v_1 + 2\mathbf{v}_2$
Oppgave 84. $\mathbf{w} = \frac{2}{3}\mathbf{v}_1 + \frac{7}{3}\mathbf{v}_2 - \frac{1}{3}\mathbf{v}_3$
Oppgave 85. $\mathbf{w} = -\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 - -2\mathbf{v}_3$
Oppgave 86. Nei
Oppgave 87. $-2\mathbf{v}_1 + v_2 = \mathbf{0}$
Oppgave 88. $2\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$
Oppgave 89. Nei
Oppgave 90.
Oppgave 91.
Oppgave 92.
Oppgave 93.
Oppgave 94.
Oppgave 95. 2
Oppgave 96. 2
Oppgave 97. 1
Oppgave 98. 0
Oppgave 99. 3
Oppgave 100. 1
Oppgave 101. 2
Oppgave 102.
Oppgave 103.
Oppgave 104.
Oppgave 105.
Oppgave 106.

$$3Cu + 2H_2O + SO_2 + 2O_2 \to Cu_3(OH)_4SO_4$$

Oppgave 107.

$$15\,PbN_6 + 44\,Cr(MnO_4)_2 \to 5\,Pb_3O_4 + 22\,Cr_2O_3 + 88\,MnO_2 + 90NO$$

Oppgave 108.
Oppgave 109.
Oppgave 110.
Oppgave 111. 2
Oppgave 112. Ja
Oppgave 113. Nei
Oppgave 114. Nei
Oppgave 115. $\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$
Oppgave 116. $\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$
Oppgave 117. $\langle \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$
Oppgave 118. $\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \rangle$
Oppgave 119. $\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$
Oppgave 120. $\langle \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$
Oppgave 121. $x(1,1)$
Oppgave 122. $x_1(1,1,1)$
Oppgave 123. $y(0,1)$
Oppgave 124. $x_2(2,1,1)$
Oppgave 125. bx
Oppgave 126.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Oppgave 127. Dimensjonen til V er 8, kan ikke si noe om dimensjonen til W.
Oppgave 128. n
Oppgave 129.

a)

$$\begin{aligned} T(af+bg) &= \frac{1}{2}x\frac{d}{dx}(af+bg) \\ &= \frac{1}{2}ax\frac{df}{dx} + \frac{1}{2}bx\frac{dg}{dx} \\ &= aT(f) + bT(g) \end{aligned}$$

b)

$$T(ax^2+bx+c) = \frac{1}{2}x(2ax+b)$$

c) ax^2 og bx

Oppgave 130.
Oppgave 131.
Oppgave 132. a) $\lambda^2 - 1$, egenverdier: 1 og -1 b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$
Oppgave 133.a) $\lambda^2 - 2\lambda + 1$, egenverdi $\lambda = 1$ b) Egenvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, ingen basis
Oppgave 134.
Oppgave 135. a) 0 b) $(2,1,-1)$ c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 1, $\dim V = 2$
Oppgave 136. c) 2

Oppgave 137.
Oppgave 138. d) rang 2, dimensjon til nullrom 0
Oppgave 139. d) rang 2, dimensjon til nullrom 1
Oppgave 140. c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ d) rang 2, dimensjon til nullrom 1
Oppgave 141. d) e^x
Oppgave 142. c) 0
Oppgave 143. a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ b) rang 3, nullrom 0
Oppgave 144. a) rang 2, nullrom 0
Oppgave 145. a) rang 1 b) rang 1, nullrom utspent av $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ c) rang 0, dimensjon nullrom 1. rang 1, dimensjon nullrom 2
Oppgave 146. a) $\lambda^2 - 3\lambda + 2$, egenverdier 1,2 b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ d) $2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e) $2v_1 + 2^n v_2$
Oppgave 147. a) $\lambda^2 - 1$, 1, -1 b) $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ d) $-v_1 + v_2$ e) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 + (-1)^{n+1} \end{pmatrix}$
Oppgave 148. a) $\lambda^2 - 1.3\lambda + 0.3$, 1, 0.3 b) $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ d) $\frac{1}{7}(-v_1 + 5v_2)$ e) $\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$