Oppgaver til kapittel 3

Skriv $\mathbf{w}$ som en lineær kombinasjon av $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ (og $\mathbf{v}_3$):

Oppgave 82.

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Oppgave 83.

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Oppgave 84.

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

og

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Oppgave 85.

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

og

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Finnes det noen lineær avhengighet mellom vektorene:

Oppgave 86.

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Oppgave 87.

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Oppgave 88.

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Oppgave 89.

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Oppgave 90. *Vis at*

$$\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$$

danner en basis for $\mathbb{R}^2$.

Oppgave 91. *Vis at*

$$\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\}$$

danner en basis for $\mathbb{R}^2$.

Oppgave 92. *Vis at*

$$\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$$

danner en basis for $\mathbb{R}^3$.

Oppgave 93. *Vis at*

$$\{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\}$$

danner en basis for $\mathbb{R}^3$.

Oppgave 94. *Vis at*

$$\{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$$

danner en basis for $\mathbb{R}^3$.

Oppgave 95. *Hva er dimensjonen til vektorrommet generert av*

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Finn rangen til matrisene:

Oppgave 96.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Oppgave 97.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Oppgave 98.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Oppgave 99.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Oppgave 100.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Oppgave 101.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Oppgave 102. *Vis at mengden*

$$V = \{(a,b,0) \in \mathbb{R}^3 \mid a,b \in \mathbb{R}\}$$

danner et vektorrom.

Oppgave 103. *La V være mengden av funksjoner $f(x)$ definert på intervallet $[-1,1]$ slik at $f(0) = 0$. Vis at mengden danner et vektorrom.*

Oppgave 104. *La $\mathbf{w}$ være en søylevektor. Vis at mengden av søylevektorer $\mathbf{v}$ som oppfyller $\mathbf{v}^T\mathbf{w} = 0$ danner et vektorrom.*

Oppgave 105. *La V_1 og V_2 være underrom av $\mathbb{R}^n$.*

a) Vis at $V_1 \cap V_2$ også er et underrom av $\mathbb{R}^n$.

b) Vis ved et eksempel at $V_1 \cup V_2$ ikke nødvendigvis er et underrom av $\mathbb{R}^n$.

Oppgave 106. *Balanser reaksjonslikningen*

$$Cu + H_2O + SO_2 + O_2 \to Cu_3(OH)_4SO_4$$

Oppgave 107. *Balanser reaksjonslikningen*

$$PbN_6 + CrMn_2O_2 \to Pb_3O_4 + Cr_2O_3 + MnO_2 + NO$$

Oppgave 108. *Vis at mengden $\{x, x^2, x^3\}$ av polynomfunksjoner er lineært uavhengig.*

Oppgave 109. *Forklar hvorfor mengden $\{\sin^2 x, \cos^2 x, 1\}$ er lineært avhengig.*

Oppgave 110. *Vis at*

$$\{1, x+1, x^2+2x+1\}$$

danner en basis for $\mathscr{P}_2$.

Oppgave 111. *Hva er dimensjonen til vektorrommet generert av*

$$\cos 2t, \cos^2 t, \sin^2 t, 1$$

Avgjør om følgende avbildninger er lineære:

Oppgave 112. $T(x,y) = (x, 2y, x-y)$

Oppgave 113. $T(x,y) = (xy, x+y)$

Oppgave 114. $T(x,y) = (x,y,1)$

Regn ut nullrommet til matrisene:

Oppgave 115.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Oppgave 116.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Oppgave 117.

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Oppgave 118.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Oppgave 119.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{6} \\ 3 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

Oppgave 120.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Regn ut nullrommet til lineæravbildningene:

Oppgave 121. $T(x,y) = x - y$

Oppgave 122. $T(x_1,x_2,x_3) = (x_1 - x_2, x_2 - x_3)$

Oppgave 123. $T(x,y) = x$

Oppgave 124. $T(x_1,x_2,x_3) = (x_1 - 2x_2, x_2 - x_3, x_3 - x_2)$

Oppgave 125. $T(f(x)) = xf'(x) - f(x)$, $f(x) \in \mathscr{P}_3$

Oppgave 126. *Regn ut nullrommet til matrisen*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

og forklar hvorfor matrisen er invertibel.

Oppgave 127. *Vi har gitt en lineæravbildning $T : V \to W$. Vi vet at dimensjonen til nullrommet til T er 5 og rangen til T er 3. Hva er dimensjonen til V? Kan vi si noe om dimensjonen til W?*

Oppgave 128. *Derivasjonsoperatoren $D : \mathscr{P}_n \to \mathscr{P}_n$ har 1-dimensjonalt nullrom, generert av de konstante polynomene. Vi vet at dimensjonen til $\mathscr{P}_n$ er $n+1$. Hva er rangen til derivasjonsoperatoren i dette tilfellet?*

Oppgave 129. *Vi har gitt en avbildning $T : \mathscr{P}_2 \to \mathscr{P}_2$ gitt ved $f(x) \mapsto \frac{1}{2}xf'(x)$.*

a) Vis at T er en lineæravbildning.

b) Et vilkårlig element i $\mathscr{P}_2$ kan skrives på formen $f(x) = ax^2 + bx + c$. Finn et uttrykk for $T(ax^2 + bx + c)$.

c) Finn en egenfunksojn for operatoren T.

Oppgave 130. *La $a \in \mathbb{R}$ være et reelt tall. Vis at* ***evalueringsavbildningen***

$$ev_a : \mathscr{P}_2 \to \mathbb{R}$$

gitt ved $ev_a(f(x)) = f(a)$ er en lineær avbildning.

Oppgave 131. *La $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$ være et lukket og begrenset intervall. La $C(I)$ være mengden av kontinuerlige funksjoner definert på intervallet I. Vis at integrasjonsavbildningen*

$$\int : C(I) \to \mathbb{R}$$

gitt ved $f(x) \mapsto \int_a^b f(x)\,dx$ er en lineær avbildning.

Oppgave 132. *La A være en 2×2-matrise gitt ved*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

a) Regn ut det karakteristiske polynomet til A og finn egenverdiene.

b) Finn egenvektorene til A og vis at de danner en basis for $\mathbb{R}^2$.

Oppgave 133. *La A være en 2×2-matrise gitt ved*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Regn ut det karakteristiske polynomet til A og finn egenverdiene.

b) Finn egenvektorene til A. Danner de en basis for $\mathbb{R}^2$?

Oppgave 134. *Vi har gitt tre vektorer*

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},\ \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},\ \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

a) Vis at mengden $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ er lineært avhengig og finn en lineær avhengighet mellom de tre vektorene.

b) Vi lar de tre vektorene være søylene i en 3×3-matrise M.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

Vis at determinanten er 0 og forklar sammenhengen med resultatet i a).

c) La V være vektorrommet utspent av $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$. Finn en vektor i $\mathbb{R}^3$ som ikke ligger i V.

Oppgave 135. *Vi har gitt tre vektorer*

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Vi lar de tre vektorene være søylene i en 3×3-matrise M.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Regn ut determinanten til M.

b) Begrunn hvorfor mengden $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ er lineært avhengig og finn en lineær avhengighet mellom de tre vektorene.

c) La V være vektorrommet utspent av $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$. Finn en vektor i $\mathbb{R}^3$ som ikke ligger i V. Hva er dimensjonen til vektorrommet V?

Oppgave 136. *Vi har gitt tre vektorer*

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Begrunn hvorfor mengden $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ er lineært avhengig.

b) Vis at alle mulige utvalg av to av de tre vektorene $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ vil gi oss lineært uavhengige mengder.

c) La V være vektorrommet utspent av $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$. Hva er dimensjonen til dette vektorrommet?

Oppgave 137. *La V være vektorrommet utspent av*

$$\mathscr{B} = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \}$$

a) Vis at mengden $\mathscr{B}$ er lineært uavhengig.

b) Forklar hvorfor $\mathscr{B}$ danner en basis for $\mathbb{R}^3$.

c) La

$$\mathscr{B}' = \{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \}$$

Forklar hvorfor $\mathscr{B}$ og $\mathscr{B}'$ genererer samme vektorrom.

d) La

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

være søylene i en 3×3-matrise. Forklar hvorfor matrisen er invertibel.

Oppgave 138. *La V være vektorrommet utspent av*

$$\mathscr{B} = \{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \}$$

a) Vis at mengden $\mathscr{B}$ er lineært uavhengig.

b) Forklar hvorfor $\mathscr{B}$ danner en basis for $\mathbb{R}^2$.

c) La

$$\mathscr{S} = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}$$

Forklar hvorfor $\mathscr{B}$ og $\mathscr{S}$ genererer samme vektorrom.

d) La

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

være søylene i en 2×2-matrise. Hva er rangen til denne matrisen? Og dimensjonen til nullrommet?

Oppgave 139. *La V være vektorrommet utspent av*

$$\mathscr{B} = \{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \}$$

a) Vis at mengden $\mathscr{B}$ er lineært uavhengig.

b) Forklar hvorfor $\mathscr{B}$ ikke danner en basis for $\mathbb{R}^3$.

c) La

$$\mathscr{C} = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \}$$

Forklar hvorfor $\mathscr{B}$ og $\mathscr{C}$ genererer samme vektorrom.

d) La

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

være søylene i en 3×3-matrise. Hva er rangen til denne matrisen? Og dimensjonen til nullrommet?

Oppgave 140. *I denne oppgaven lar vi $\mathscr{P}_2$ betegne vektorrommet av polynomer av grad mindre enn eller lik 2.*

a) Vis at 1, $x + \frac{1}{2}$ og $x^2 - x + \frac{1}{6}$ danner en lineært uavhengige mengde i $\mathscr{P}_2$,

b) Vis at $\mathscr{B} = \{1, x + \frac{1}{2}, x^2 - x + \frac{1}{6}\}$ gir en basis for $\mathscr{P}_2$,

c) La $D : \mathscr{P}_2 \to \mathscr{P}_2$ være derivasjonsoperatoren $D(f(x)) = f'(x)$. Skriv opp matrisen $[D]_{\mathscr{B}}$ til D relativt til basisen $\mathscr{B}$,

d) Hvor stor er rangen til D, og hva er dimensjonen til nullrommet?

Oppgave 141. *I denne oppgaven lar vi $V = \langle e^x, e^{-x} \rangle$.*

a) Vis at $\frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ og $\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ danner en lineært uavhengige mengde i $\mathscr{P}_2$,

b) Vis at $\mathscr{B} = \{\frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})\}$ gir en basis for V,

c) La $D : V \to V$ være derivasjonsoperatoren $D(f(x)) = f'(x)$. Vis at operatoren faktisk er en avbildning fra V inn i V.

d) Finn en egenfunksjon for D i rommet V.

Oppgave 142. *La $V = \langle \cos x, \cos 2x, \cos 3x, \dots \rangle$.*

a) Vis at for alle positive hele tall $m \neq n$ så er $\{\cos nx, \cos mx\}$ lineært uavhengig.

b) Vis at Laplaceoperatoren $\Delta = D^2$ er en lineær operator på vektorrommet V, det vil si lineær og $\Delta(\mathbf{v}) \in V$ for alle $\mathbf{v} \in V$. (Definisjonen av Δ er gitt ved $\Delta(f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ for en funksjon $f \in V$)

c) Finn dimensjonen til nullrommet til Δ som operator på V.

Oppgave 143. *I denne oppgaven lar vi $\mathscr{P}_2$ betegne vektorrommet av polynomer av grad mindre enn eller lik 2.*

a) Definer en lineæravbildning $E : \mathscr{P}_2 \to \mathbb{R}^3$ ved

$$E(f(x)) = \begin{pmatrix} f(0) \\ f(1) \\ f(2) \end{pmatrix}$$

Hvis vi bruker basisen $\mathscr{B} = \{1, x, x^2\}$ for $\mathscr{P}_2$ og standardbasisen for $\mathbb{R}^3$, hva blir da matrisen $[E]$ til E?

b) Finn rangen og nullrommet til $[E]$.

Oppgave 144. *I denne oppgaven lar vi $V = \langle e^x, e^{-x} \rangle$ og $W = \mathbb{R}^2$.*

a) Definer en lineæravbildning $T : V \to W$ ved $T(e^x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ og $T(e^{-x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Finn nullrommet og rangen til denne avbildningen.

b) La nå $S : W \to V$ være avbildningen gitt ved $S(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = e^x$ og $S(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = e^{-x}$. Vis at $S \circ T$ og $T \circ S$ er identitetsavbildningene på henhodsvis V og W.

Oppgave 145. *La $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ være gitt ved $T(x) = (x, 2x, 3x)$.*

a) Vis at nullrommet til T er (0). Hva blir rangen til T?

b) Definer en lineæravbildning $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ved $S(x_1, x_2, x_3) = x_1 - 2x_2 + x_3$. Finn rangen og nullrommet til S.

c) ?Betrakt så de sammensatte avbildningene $S \circ T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ og $T \circ S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Finn rangen og nullrommene til disse to avbildningene.

Oppgave 146. *La $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ være lineæravbildningen gitt ved $T\mathbf{v} = A\mathbf{v}$ der A er 2×2-matrisen*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Regn ut det karakteristiske polynomet til T og finn egenverdiene.

b) Finn de tilhørende egenvektorene.

c) Vis at egenvektorene til A danner en basis for $\mathbb{R}^2$.

d) La $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Skriv $\mathbf{w}$ som en lineær kombinasjon av egenvektorer for A.

e) Regn ut $T(\mathbf{w})$ og $T(T(\mathbf{w}))$. Finn et uttrykk for $T^n(\mathbf{w})$ for en vilkårlig n. Vi skriver $T^n(x)$ for sammensetningen $T \circ T \circ T \circ \cdots \circ T$ (n ganger).

Oppgave 147. *La $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ være lineæravbildningen gitt ved $T\mathbf{v} = A\mathbf{v}$ der A er 2×2-matrisen*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Regn ut det karakteristiske polynomet til T og finn egenverdiene.

b) Finn de tilhørende egenvektorene.

c) Vis at egenvektorene til A danner en basis for $\mathbb{R}^2$.

d) La $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Skriv $\mathbf{w}$ som en lineær kombinasjon av egenvektorer for A.

e) Regn ut $T(\mathbf{w})$ og $T(T(\mathbf{w}))$. Finn et uttrykk for $T^n(\mathbf{w})$ for en vilkårlig n. Vi skriver $T^n(x)$ for sammensetningen $T \circ T \circ T \circ \cdots \circ T$ (n ganger).

Oppgave 148. *La $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ være lineæravbildningen gitt ved $T\mathbf{v} = A\mathbf{v}$ der A er 2×2-matrisen*

$$A = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.2 \\ 0.5 & 0.8 \end{pmatrix}$$

a) Regn ut det karakteristiske polynomet til T og finn egenverdiene.

b) Finn de tilhørende egenvektorene.

c) Vis at egenvektorene til A danner en basis for $\mathbb{R}^2$.

d) La $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Skriv $\mathbf{v}$ som en lineær kombinasjon av egenvektorer for A.

e) Regn ut

$$\lim_{n\to\infty} A^n \mathbf{v}$$

f) Kan du finne en vektor $\mathbf{w}$ slik at

$$\lim_{n\to\infty} A^n \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

.