UiO : Matematisk institutt
Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Kapittel 3: Euklidske vetorrom

MAT1060: Matematikk for anvendelser 2

Ole Fredrik Brevig

Versjon 1.0



Bruksanvisning

Dette notatet er en (delvis) erstatning for Kapittel 3 i *Kompendium, MAT1060* av Arne B. Sletsjøe. Vi behandler ikke abstrakte vektorrom, men begrenser oss til å se på underrom av de Euklidske vektorrommene $\mathbb{R}^n$. Det er tilstrekkelig bakgrunn for de geometriske anvendelsene i Kapittel 4 og Kapittel 5.

Det presenteres bare noen få eksempler i dette notatet, men følgende eksempler fra Kapittel 3 i *Kompendium, MAT1060* er relevante for stoffet vi dekker her. Merk i den sammenheng at det som kalles "vektorrom" i kompendiet kalles "underrom" i dette notatet.

- Eksempel 3.1.6.
- Eksempel 3.1.9.
- Eksempel 3.1.12.
- Eksempel 3.1.14.
- Eksempel 3.2.2.
- Eksempel 3.2.7.
- Eksempel 3.2.8.
- Eksempel 3.2.9.
- Eksempel 3.2.10.
- Eksempel 3.3.1.
- Eksempel 3.3.2.

Merk også at stoffet på side 62–63 i kompendiet om egenverdier har vi diskutert i Forelesning 7. Stoffet på side 64–65 anses for kursorisk og vil ikke bli dekket i forelesningene.

Innhold

Bruksanvisning i

Innhold iii

3 Euklidske vektorrom 1

3.1 Underrom, basis og dimensjon 1

3.2 Lineære avbildninger 4

3.3 Matrisens fundamentale underrom 6

KAPITTEL 3

Euklidske vektorrom

Når eg står her bakom fjøset,
lukter jakka mi av ku.
Eg er heit og lufta kring meg brenner,
og rett framfor meg står du.

Saft - Fjøsvise

Vi starter med litt repetisjon fra Kapittel 1. La $\mathcal{V} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ være en mengde vektorer fra $\mathbb{R}^n$. En *lineærkombinasjon* av vektorene er summen

$$x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \cdots + x_m\mathbf{v}_m$$

hvor $x_1, x_2, \ldots, x_m$ er reelle tall.

Definisjon. En mengde $\mathcal{V} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ av vektorer fra $\mathbb{R}^n$ kalles *lineært uavhengig* dersom den eneste løsningen av ligningen

$$x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \cdots + x_m\mathbf{v}_m = \mathbf{0}$$

er $x_1 = x_2 = \cdots = x_m = 0$. I motsatt tilfelle kalles $\mathcal{V}$ lineært avhengig.

Et alternativt—og nyttig—perspektiv er at en mengde $\mathcal{V}$ av vektorer fra $\mathbb{R}^n$ er lineært avhengig hvis og bare hvis en av vektorene i mengden kan skrives som en lineærkombinasjon av de andre.

3.1 Underrom, basis og dimensjon

Vi begynner med å formulere det viktigste konseptet i kapittelet.

Definisjon. La V være en ikke-tom mengde av vektorer fra $\mathbb{R}^n$. Hvis det for alle vektorer $\mathbf{x}$ og $\mathbf{y}$ fra V og alle reelle tall a og b er slik at

$$a\mathbf{x} + b\mathbf{y} \tag{3.1.1}$$

også er en vektor i V, så kalles V et *underrom* av $\mathbb{R}^n$

Vi kan alternativt si at et underrom V er *lukket* under linærkombinasjoner, fordi vi kommer oss ikke ut av V med lineærkombinasjoner av vektorer fra V. Fra dette perspektivet er det klart at $V = \mathbb{R}^n$ er et underrom av $\mathbb{R}^n$. Det er også åpenbart at $V = \mathbb{R}^n$ det største mulige underrommet av $\mathbb{R}^n$.

Om vi velger to vilkårlige vektorer $\mathbf{x}$ og $\mathbf{y}$ fra V og $a = b = 0$ i (3.1.1), så ser vi at nullvektoren $\mathbf{0}$ er med i alle underrom. Altså er det minste mulige underrommet av $\mathbb{R}^n$ gitt ved $V = \{\mathbf{0}\}$. Det er ikke så vanskelig å sjekke at dette faktisk er et underrom, siden vi her bare kan velge $\mathbf{x} = \mathbf{y} = \mathbf{0}$ i (3.1.1) og

$$a\mathbf{0} + b\mathbf{0} = \mathbf{0}$$

for alle tall a og b. Vi kaller ofte $V = \{\mathbf{0}\}$ det *trivielle* underrommet.

OBS! Selv om det kan være terminologisk fristende, så er det viktig at vi *ikke* kaller $V = \{\mathbf{0}\}$ for nullrommet.

Eksempel 3.1.1. Det finnes ingen andre underrom av $\mathbb{R}$. Hvis V *ikke* er det trivielle underrommet, så finnes et tall $x \neq 0$ i V. Vi kan da skrive alle tall y i $\mathbb{R}$ som lineærkombinasjonen $y = (y/x) \cdot x$. Følgelig er $V = \mathbb{R}$.

Eksempel 3.1.2. Det er tre forskjellige typer underrom av planet $\mathbb{R}^2$. De er

- det trivielle underrommet $\{\mathbf{0}\}$,
- mengden av vektorer på samme rette linje gjennom origo,
- $\mathbb{R}^2$.

Eksempel 3.1.3. Det er fire forskjellige typer underrom av rommet $\mathbb{R}^3$. De er

- de trivielle underrommet $\{\mathbf{0}\}$,
- mengden av alle vektorer på samme rette linje gjennom origo,
- mengden av alle vektorer i samme plan gjennom origo,
- $\mathbb{R}^3$.

Vårt neste mål er å forsøke å si noe om hvor stort et underrom er. Det er ikke vanskelig å overbevise seg om at dersom et underrom V ikke er det trivielle underrommet, så vil V inneholde uendelig mange vektorer. Vi trenger derfor en annen tilnærming, nemlig *dimensjon*. I Eksempel 3.1.3 tenker vi kanskje intuitivt at rommet $\mathbb{R}^3$ har dimensjon 3, at et plan har dimensjon 2 og at en rett linje har dimensjon 1. Det er da naturlig å si at det trivielle underrommet $\{\mathbf{0}\}$ har dimensjon 0.

Før vi kan gi en presis matematisk definisjon av dimensjon, trenger vi litt mer maskineri. Først skal vi se på en måte å lage vektorrom på. La $\mathcal{V}$ være en mengde vektorer fra $\mathbb{R}^n$. Da er $V = \operatorname{span} \mathcal{V}$ mengden av alle vektorer som kan skrives som en linæerkombinasjon av vektorer fra $\mathcal{V}$. Det følger nesten umiddelbart fra definisjonen at V er et underrom av $\mathbb{R}^n$. Vi sier at megnden $\mathcal{V}$ *utspenner* underrommet V.

Eksempel 3.1.4. Mengden

$$\mathcal{V} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

utspenner underrommet

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a+b \\ a-b \\ 2a \end{pmatrix} \,:\, a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

av $\mathbb{R}^3$. Med litt innsats finner vi ut at underrommet V består av alle (x, y, z) i $\mathbb{R}^3$ som oppfyller planligningen

$$x + y - z = 0.$$

Det er mange forskjellige mengder som utspenner samme underrom. I Eksempel 3.1.4 kunne vi også brukt mengdene

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{eller} \quad \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}. \tag{3.1.2}$$

Mengden til venstre i (3.1.2) er lineært avhengig, siden

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{3.1.3}$$

Dette betyr at vi kan forkaste en av vektorene uten å forandre underrommet som spennes ut. Om vi forkaster den siste vektoren kommer vi tilbake til mengden oppgitt i Eksempel 3.1.4. Det er ikke vanskelig å sjekke at denne mengden er lineært uavhengig. Det er ofte hensiktsmessig å bruke så få vektorer som mulig i en utspennende mengde. Dette leder oss til følgende.

Definisjon. La V være et underrom av $\mathbb{R}^n$. En mengde $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots \mathbf{v}_m\}$ av vektorer fra $\mathbb{R}^n$ kalles en *basis* for V dersom $\mathcal{B}$ er lineært uavhengig og

$$\operatorname{span} \mathcal{B} = V.$$

For vektorromet V i Eksempel 3.1.4 betraktet vi de tre utspennende mengdene

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{og} \quad \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Her er den første og den siste mengden basiser, men mengden i midten er ikke en basis siden den ikke er lineært uavhengig. Det er ikke tilfeldig at de to mengdene som er basiser inneholder like mange vektorer.

Teorem 3.1.5. *La V være et underrom av $\mathbb{R}^n$. Hvis $\mathcal{B}_1$ og $\mathcal{B}_2$ er to forskjellige basiser for V, så inneholder $\mathcal{B}_1$ og $\mathcal{B}_2$ like mange vektorer.*

Bevis. Hovedpoenget er at dersom $\mathcal{B}_2$ inneholder flere vektorer enn $\mathcal{B}_1$, kan man bruke antagelsen om at $\mathcal{B}_1$ er en basis for V til å vise at $\mathcal{B}_2$ ikke er lineært uavhengig. Se Kompendium Teorem 3.1.6 for detaljene. □

Ved hjelp av Teorem 3.1.5 kan vi gi en matematisk presis definisjon av dimensjon.

Definisjon. Vi definerer *dimensjonen* til et ikke-trivielt underrom V av $\mathbb{R}^n$ som antall elementer i en basis $\mathcal{B}$ for V. *Dimensjonen* til det trivielle underrommet $V = \{\mathbf{0}\}$ settes lik 0. I begge tilfeller lar vi $\dim V$ betegne dimensjonen til V.

Underromet V fra Eksempel 3.1.4 har altså $\dim V = 2$. Siden V er et plan gjennom origo stemmer dette med vår intuisjon. Det samme gjelder—forhåpentligvis—også følgende eksempel.

Eksempel 3.1.6. Vi kan skrive enhver vektor $\mathbf{x}$ i $\mathbb{R}^n$ som lineærkombinasjonen

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + x_{n-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

For $j = 1, 2, \ldots, n$ skriver vi $\mathbf{e}_j$ for vektoren med 1 i koordinat j og 0 ellers, slik at denne formelen kan skrives om til

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \cdots + x_{n-1}\mathbf{e}_{n-1} + x_n\mathbf{e}_n.$$

Det er klart at mengden $\mathcal{S} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_{n-1}, \mathbf{e}_n\}$ er lineært uavhengig. Følgelig er altså $\mathcal{S}$ en basis for $\mathbb{R}^n$ og vi kaller den *standardbasisen*. Dette viser at dimensjonen til $\mathbb{R}^n$ er lik n.

Som en konsekvens av Teorem 3.1.5 og Eksempel 3.1.6 har vi følgende.

Teorem 3.1.7. *Hvis $V \neq \{\mathbf{0}\}$ er et underrom av $\mathbb{R}^n$, så er $1 \leq \dim(V) \leq n$.*

3.2 Lineære avbildninger

Vi skal nå se på noen avbildninger (eller funksjoner) mellom $\mathbb{R}^m$ og $\mathbb{R}^n$, som vi uformelt kan si at respekterer den underliggende linære strukturen i rommene. En formell definisjon er som følger.

Definisjon. En funksjon T fra $\mathbb{R}^n$ til $\mathbb{R}^m$ kalles en *lineær avbildning* dersom

$$T(a\mathbf{x} + b\mathbf{y}) = aT(\mathbf{x}) + bT(\mathbf{y})$$

for alle (kolonne)vektorer $\mathbf{x}$ og $\mathbf{y}$ i $\mathbb{R}^n$ og alle tall a og b.

Vi har allerede sett lineære avbildninger i Kapittel 1.

Eksempel 3.2.1. La A være en $m \times n$-matrise. Da er $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ en lineær avbildning fra $\mathbb{R}^n$ til $\mathbb{R}^m$, fordi

$$T(a\mathbf{x} + b\mathbf{y}) = A(a\mathbf{x} + b\mathbf{y}) = aA\mathbf{x} + bA\mathbf{y} = aT(\mathbf{x}) + bT(\mathbf{y})$$

for alle vektorer $\mathbf{x}$ og $\mathbf{y}$ i $\mathbb{R}^n$ og alle tall a og b.

Eksempel 3.2.1 leder naturlig til følgende spørsmål: La T være en lineær avbildning fra $\mathbb{R}^n$ til $\mathbb{R}^m$. Finnes det en $m \times n$-matrise A slik at $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$? Svaret er selvfølgelig et rungende JA!

I stedet for å skrive opp et teorem gir vi her en oppskrift på hvordan A kan finnes fra T. Vi starter med standardbasisen $\mathcal{S} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ for $\mathbb{R}^n$ fra Eksempel 3.1.6. Enhver vektor $\mathbf{x}$ i $\mathbb{R}^n$ har da en unik representasjon

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n.$$

Om vi bruker T på denne formelen og bruker antagelsen om at T er en lineær avbildning, får vi

$$T(\mathbf{x}) = x_1T(\mathbf{e}_1) + x_2T(\mathbf{e}_2) + \cdots + x_nT(\mathbf{e}_n).$$

La oss definere $\mathbf{a}_j = T(\mathbf{e}_j)$ for $j = 1, 2, \ldots, n$. Siden T avbilder $\mathbb{R}^n$ inn i $\mathbb{R}^m$ vil vektorene $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ være i $\mathbb{R}^m$. Om vi lar A være matrisen med disse vektorene som kolonner, det vil si

$$A = \left(\mathbf{a_1} \,|\, \mathbf{a}_2 \,|\, \cdots \,|\, \mathbf{a}_n\right),$$

så får vi en $m \times n$ matrise som oppfyller

$$A\mathbf{x} = x_1\mathbf{a_1} + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots x_n\mathbf{a}_n = x_1T(\mathbf{e}_1) + x_2T(\mathbf{e}_2) + \cdots + x_nT(\mathbf{e}_n) = T(\mathbf{x}).$$

Vi kaller A matrisen til den lineære avbildningen T og skriver $A = [T]$.

Eksempel 3.2.2. La T være den lineære avbildningen fra $\mathbb{R}^2$ til $\mathbb{R}^3$ gitt ved

$$T(x, y) = \begin{pmatrix} x + y \\ x - y \\ 2x \end{pmatrix}.$$

Standardbasisen for $\mathbb{R}^2$ er $\mathcal{S} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$, for

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{og} \qquad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

så vi får

$$T(\mathbf{e}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \text{og} \qquad T(\mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

slik at

$$[T] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vi kjenner igjen $\mathcal{B} = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ som basisen til underrommet fra Eksempel 3.1.4. Altså avbilder T (det "vanlige") planet $\mathbb{R}^2$ til underrommet av $\mathbb{R}^3$ som er beskrevet ved planligningen $x + y - z = 0$.

Vi har akkurat sett at lineære avbildninger fra $\mathbb{R}^n$ til $\mathbb{R}^m$ samsvarer med $m \times n$-matriser. Det er derfor rimelig å spørre hvorfor vi tar oss bryet med å introdusere denne terminologien i det hele tatt. Her er to svar.

1. I Kapittel 2 kalte vi matriser for "overgangsmatriser" for å indikere at vi var interessert i et diskret dynamisk system. På samme måte kan vi snakke om lineære avbildninger når vi er interessert i de *geometriske* egenskapene til matrisen.

2. Vi skal senere se på lineære avbildninger for abstrakte vektorrom, og det kan derfor være nyttig å ha sett det i mer konkret setting først.

3.3 Matrisens fundamentale underrom

I Eksempel 3.2.2 så vi en lineær avbildning (eller en 3×2-matrise) som sendte $\mathbb{R}^2$ til et (to-dimensjonalt) underrom av $\mathbb{R}^3$. Dette er et generelt fenomen som vi nå skal se nærmere på.

Definisjon. *Kolonnerommet* til $m \times n$ matrisen

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{a_1} \,|\, \mathbf{a}_2 \,|\, \cdots \,|\, \mathbf{a}_n \end{pmatrix}$$

er underrommet $\operatorname{col} A = \operatorname{span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ av $\mathbb{R}^m$. Dimensjonen til $\operatorname{col} A$ kalles *rangen* til A og vi skriver $\operatorname{rank} A = \dim(\operatorname{col} A)$.

Hvis $\mathbf{y}$ er en vektor i $\operatorname{col} A$, så finnes tall $x_1, x_2, \ldots, x_n$ slik at

$$\mathbf{y} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n = A\mathbf{x},$$

der $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$. Vi ser fra dette at $\operatorname{col} A$ består at nøyaktig de vektorene $\mathbf{y}$ i $\mathbb{R}^m$ slik at det finnes en vektor $\mathbf{x}$ i $\mathbb{R}^n$ slik at $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$. Hvis vi tenker på A som en lineær avbildning fra $\mathbb{R}^n$ til $\mathbb{R}^m$ består altså kolonnerommet av nøyaktig de vektorene som den lineær avbildningen spytter ut.

Eksempel 3.3.1. La oss betrakte matrisene

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{og} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Her er A_1 en lineær avbildning fra $\mathbb{R}^2$ til $\mathbb{R}^3$ og A_2 en lineær avbildning fra $\mathbb{R}^3$ til $\mathbb{R}^3$. Fra Eksempel 3.1.4 og den påfølgende diskusjonen ser vi at

$$\operatorname{col} A_1 = \operatorname{col} A_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a+b \\ a-b \\ 2a \end{pmatrix} \,:\, a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Det betyr at $\operatorname{rank} A_1 = \operatorname{rank} A_2 = 2$.

Siden $\operatorname{col} A$ er et underrom av $\mathbb{R}^m$, så følger det av Teorem 3.1.7 at *uansett* hva n måtte være, så kan ikke $\operatorname{rank} A$ bli større enn m. Hvis $n > m$ betyr dette at A sender det n-dimensjonale $\mathbb{R}^n$ til et underrom av $\mathbb{R}^m$ av mindre dimensjon. Altså er det naturlig å tenke at noe går tapt i den lineær avbildningen. Følgende definisjon fanger opp dette.

Definisjon. La A være en $m \times n$-matrise. *Nullrommet* til A er underrommet av $\mathbb{R}^n$ som består av de vektorene $\mathbf{x}$ som oppfyller

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Vi skriver $\mathcal{N}(A)$ for nullrommet til A. Dimensjonen til $\mathcal{N}(A)$ kalles *nulliteten* til A og vi skriver $\operatorname{nullity} A = \dim(\mathcal{N}(A))$.

Siden $\mathcal{N}(A)$ er et underrom av $\mathbb{R}^n$ vet vi fra Teorem 3.1.7 at $\operatorname{nullity} A$ ikke kan bli større enn n.

Det er kanskje greit å dobbeltsjekke at $\mathcal{N}(A)$ faktisk er et vektorrom. La derfor $\mathbf{x}_1$ og $\mathbf{x}_2$ være i $\mathcal{N}(A)$ og la a og b være tall. Da er

$$A(a\mathbf{x}_1 + b\mathbf{x}_2) = aA\mathbf{x}_1 + bA\mathbf{x}_2 = a\mathbf{0} + b\mathbf{0} = \mathbf{0}$$

og vi er godt fornøyd.

La oss ta et steg tilbake og tenke på en $m \times n$ matrise A som en lineær avbildning. Vi starter her i $\mathbb{R}^n$ hvor vi har n dimensjoner å boltre oss i. Hvis $\operatorname{nullity} A = k$ for et tall $0 \leq k \leq n$ kan vi se for oss at vi sender k dimensjoner til $\mathbf{0}$. Da er det ikke fullstendig unaturlig å se for seg at $\operatorname{col} A$ vil bestå av de resterende $n - k$ dimensjonene. Det viser ser også å være tilfelle.

Teorem 3.3.2 (Dimensjonsteoremet)**.** *Hvis A er en $m \times n$-matrise, så er*

$$\operatorname{rank} A + \operatorname{nullity} A = n.$$

Bevis. Anta at $\operatorname{nullity} A = k$. Vi lar $\mathcal{B}_1$ være en basis for $\mathcal{N}(A)$ og utvider denne til en basis $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ for $\mathbb{R}^n$. Da har $\mathcal{B}_2$ nøyaktig $n - k$ vektorer. Dersom $\operatorname{rank}(A) < n - \operatorname{nullity}(A)$ kan vi oppnå en motsigelse mot at $\mathcal{B}_2$ er lineært uavhengig. Se Kompendium 3.2.7 for detaljene. □

Eksempel 3.3.3. Vi så i Eksempel 3.3.1 at matrisene

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{og} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

hadde $\operatorname{rank} A_1 = \operatorname{rank} A_2 = 2$. Det følger derfor av dimensjonsteoremet at $\operatorname{nullity} A_1 = 2 - 2 = 0$ og $\operatorname{nullity} A_2 = 3 - 2 = 1$. Altså er $\mathcal{N}(A_1) = \{\mathbf{0}\}$. Vi ser fra (3.1.3) at

$$\mathcal{N}(A_2) = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \,:\, t \in \mathbb{R} \right\},$$

som også viser at $\operatorname{nullity} A_2 = 1$.

Vi har følgende utvidelse av et resultat vi har sett før.

Teorem 3.3.4. *La $A = \begin{pmatrix} \mathbf{a_1} \,|\, \mathbf{a}_2 \,|\, \cdots \,|\, \mathbf{a}_n \end{pmatrix}$ være en $n \times n$-matrise. Følgende utsagn er ekvivalente:*

(a) *A er invertibel.*

(b) $\det A \neq 0$.

(c) *Mengden $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ er lineært uavhengig.*

(d) $\operatorname{rank} A = n$.

(e) $\operatorname{nullity} A = 0$.

Bevis. Vi har allerede sett at (a), (b) og (c) er ekvivalente. Det følger av (c) at $\operatorname{col} A = \mathbb{R}^n$, så $\operatorname{rank} A = \dim(\mathbb{R}^n) = n$. Fra dimensjonsteoremet får vi at at $\operatorname{nullity} A = n - \operatorname{rank} A = 0$, så (d) impliserer (e). Hvis A ikke er invertibel, så finnes en $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ slik at $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Dette viser at (e) impliserer (a). □

La oss avslutte kalaset med et godt gammeldags regneeksempel.

Eksempel 3.3.5. La $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 6 \end{pmatrix}$.

(a) Finn en basis for $\mathcal{N}(A)$.

(b) Regn ut rank A.

(c) Finn en basis for col A.

(d) Regn ut rank A.

Vi begynner altså med å se på

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 0, \\ 5x_1 & + & 4x_2 & + & 6x_3 & = & 0. \end{array}$$

Fra den første ligningen får vi $x_1 = -(2x_2 + 3x_3)$. Setter vi dette inn i den andre får vi

$$-6(2x_2 + 3x_3) + 4x_2 + 6x_3 = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 2x_2 = -3x_3.$$

Hvis vi lar $x_3 = 2t$ for et vilkårlig tall t i $\mathbb{R}$ får vi at $x_2 = -3t$ og

$$x_1 = -(2x_2 + 3x_3) = -(6t + 6t) = 0.$$

Dette betyr at

$$\mathcal{N}(A) = \left\{ t \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \,:\, t \in \mathbb{R} \right\} \qquad \text{slik at} \qquad \mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

er en basis for $\mathcal{N}(A)$ som besvarer (a). For å besvare (b), så konkluderer vi først fra denne utregningen at nullity$(A) = \dim(\mathcal{N}(A)) = 1$. Siden A er en 2×3-matrise Bruker vi så dimensjonsteoremet får vi at rank$(A) = 3 - 1 = 2$. For å starte på (c), så får vi fra definisjonen av kolonnerommet at

$$\operatorname{col} A = \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}.$$

Denne mengden er ikke en basis for col A, siden den ikke er lineært uavhengig. Vi har nemlig

$$3 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Vi forkaster derfor den tredje vektoren og får

$$\operatorname{col} A = \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\} \qquad \text{slik at} \qquad \mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$

er en basis for col A. Dette viser igjen at rank $A = \dim(\operatorname{col} A) = 2$ som er (d).