7. februar 2024

MAT1060

Obligatorisk oppgave 1 av 2

Innleveringsfrist

Torsdag 22. FEBRUAR 2024, klokken 14:30 i Canvas (canvas.uio.no).

Instruksjoner

Merk at man har **ett forsøk** på å få oppgaven godkjent. Dette betyr at det ikke lenger gis andregangsforsøk.

Du velger selv om du skriver besvarelsen for hånd og scanner besvarelsen eller om du skriver løsningen direkte inn på datamaskin (for eksempel ved bruk av LaTeX). Besvarelsen skal leveres som én PDF-fil. Scannede ark må være godt lesbare. Besvarelsen skal inneholde navn, emne og oblignummer.

Det forventes at man har en klar og ryddig besvarelse med tydelige begrunnelser. Husk å inkludere alle relevante plott og figurer. Samarbeid og alle slags hjelpemidler er tillatt, men den innleverte besvarelsen skal være skrevet av deg og reflektere din forståelse av stoffet. Er vi i tvil om du virkelig har forstått det du har levert inn, kan vi be deg om en muntlig redegjørelse.

Søknad om utsettelse av innleveringsfrist

Hvis du blir syk eller av andre grunner trenger å søke om utsettelse av innleveringsfristen, må du ta kontakt med studieadministrasjonen ved Matematisk institutt (e-post: studieinfo@math.uio.no) senest samme dag som innleveringsfristen.

For å få adgang til avsluttende eksamen i dette emnet, må man bestå alle obligatoriske oppgaver i ett og samme semester.

For fullstendige retningslinjer for innlevering av obligatoriske oppgaver, se her:

www.uio.no/studier/admin/obligatoriske-aktiviteter/mn-math-oblig.html

LYKKE TIL!

Denne obligatoriske oppgaven består av tre oppgaver. To av disse må godkjennes for at oppgaven totalt skal godkjennes. I tillegg til den endelige innleveringsfristen 22. februar, vil det være mulig å levere inn

- Oppgave 1 i Canvas innen 8. februar, klokken 14:30.
- Oppgave 1 og 2 i Canvas innen 15. februar, klokken 14:30.

Det vil bli gitt tilbakemeldinger på oppgaver som leveres inn til disse fristene. Da vil du enten få vite at oppgaven er godkjent eller hvordan løsningen må utbedres. Merk at det er kun mulig å levere inn Oppgave 3 ved endelig innleveringsfrist 22. februar.

Oppgave 1. Et bibliotek har to filialer A og B. Bøker man har lånt, kan leveres inn igjen ved begge filialene uavhengig av hvor de ble lånt. Bibliotekarene tar en opptelling i begynnelsen av hvert år. Den viser at av de bøkene som var i filial A i begynnelsen av et år, vil 70% være i filial A året etter, mens 25% vil være i filial B. Resten av bøkene vil være mistet eller makulert. Opptellingen viser også at av de bøkene som var i filial B i begynnelsen av et år, vil 15% være i filial A året etter, mens 75% vil være i filial B, og resten vil være mistet eller makulert.

a) Finn en matrise M slik at dersom det i begynnelsen av et år er x og y bøker i filialene A og B, så vil fordelingen x' og y' av disse bøkene året etter være gitt ved

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

b) Regn ut M^2.

c) I begynnelsen av et år er det 200000 bøker i filial A og 150000 i filial B. Hvor mange av disse bøkene er det i hver av filialene to år etter? Hvor mange av de opprinnelige bøkene er mistet eller makulert?

d) I begynnelsen av et annet år er det 390000 bøker i filial A og 195000 i filial B. Hvor mange bøker var det i hver av filialene året før?

Oppgave 2. Anta at ved et stortingsvalg er det kun tre partier å velge mellom. Da kan vi representere stemmeprosentandelene ved en vektor i $\mathbb{R}^3$,

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \%\text{ stemmer på Venstrepartiet (VP)} \\ \%\text{ stemmer på Høyrepartiet (HP)} \\ \%\text{ stemmer på Midtenpartiet (MP)} \end{pmatrix}.$$

Anta også at resultatet ved et gitt stortingsvalg kun avhenger av resultatet i det foregående valget. Av de som stemte VP et gitt år vil 70% fortsette å stemme VP året etter, mens 20% vil nå stemme HP og 10% MP. Av de som stemte HP vil 80% fortsette å stemme på HP året etter, mens 10% vil nå stemme på VP og 10% på MP. Til slutt, av de som stemte MP vil 40% fortsette å stemme MP, mens 30% vil nå stemme VP og 30% HP.

a) Tegn et boksdiagram som illustrerer det dynamiske systemet og finn overgangsmatrisen A.

b) Anta at valgresultatet etter et gitt år er gitt ved

$$\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 0.55 \\ 0.40 \\ 0.05 \end{pmatrix}.$$

Hva blir fordelinga ved de to neste valgene?

c) Er A en stokastisk matrise? Finn alle likevektstilstander for systemet.

d) Regn ut egenverdiene til A. Hva vil skje med stemmeprosentandelene fremover?

Oppgave 3. La

$$\mathcal{V} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -12 \\ 11 \end{pmatrix} \right\}.$$

a) Er $\mathcal{V}$ en basis for $\mathbb{R}^3$?

b) La A være matrisen med vektorene $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, og $\mathbf{v}_3$ som kolonner. Regn ut egenverdiene til A.

c) Finn en basis for $\mathbb{R}^3$ som består av egenvektorer til A.

d) Hva er rangen til A? Finn en basis for nullrommet til A.