

Anna Sletsjøe
Arne B. Sletsjøe

Oppgavesamling, MAT 1060

Oppgaver til kapittel 1

Oppgave 1. *Tegn følgende vektorer i planet.*

a) $\mathbf{v_1} = (2,1)$

b) $\mathbf{v_2} = (-1,2)$

c) $2\mathbf{v_1}$

d) $\mathbf{v_1} + \mathbf{v_2}$

Oppgave 2. *Regn ut*

a) $(2,1) \cdot (1,1)$

b) $(-1,1) \cdot (-2,-3)$

c) $(3,4) \cdot (3,4)$

d) $\|(\frac{1}{2}, \sqrt{2})\|^2$

Oppgave 3. *Hva er størrelsen til matrisene, både faktorene og produktet, i 4, 17, 20, 21?*

Regn ut produktet av matrise og vektor:

Oppgave 4.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Oppgave 5.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 54 \\ -\frac{1}{17} \end{pmatrix}$$

Oppgave 6.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Oppgave 7.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Oppgave 8.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Oppgave 9.

$$(1,2) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Oppgave 10.

$$(1,1)\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Oppgave 11.

$$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{5}{6}\right)\cdot\begin{pmatrix} 6 & 2 & 4 \\ 6 & 9 & 12 \\ 6 & 6 & 12 \end{pmatrix}$$

Oppgave 12. *a) La*

$$A=\begin{pmatrix}2\end{pmatrix} \quad og \quad B=\begin{pmatrix}3\end{pmatrix}$$

Hva blir $A\cdot B$ og $B\cdot A$.

b) La

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix} \quad og \quad B=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

Regn ut produktene $A\cdot B$ og $B\cdot A$.

c) La

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1\\2 & 0\\0 & 2\\1 & 0\end{pmatrix} \quad og \quad B=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0 & 3\\4 & 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

Regn ut produktene $A\cdot B$ og $B\cdot A$.

d) La

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\0 & 1 & 1\\-1 & 1 & 0\end{pmatrix} \quad og \quad B=\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & -1\\0 & 1\end{pmatrix}$$

Regn ut produktet $A\cdot B$. Har produktet $B\cdot A$ noen mening?

Utfør regneoperasjonene:

Oppgave 13.

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\cdot\left(\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

Oppgave 14.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}+2\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Oppgave 15.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Oppgave 16.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & -3 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Regn ut produktet av matrisene:

Oppgave 17.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Oppgave 18.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Oppgave 19.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Oppgave 20.

$$2\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Oppgave 21.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Oppgave 22.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

Oppgave 23.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{10} & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Oppgave 24.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$$

Oppgave 25. *La*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}$$

hvor $c \in \mathbb{R}$ er et reelt tall. Finn A^2, A^3 og A^4. Ser du et mønster? Hva blir A^n?

Oppgave 26. *Kombiner hver matrise med riktig begrep, det kan være flere begreper som stemmer for hver matrise.*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

1. Øvre triangulær 2. Nedre triangulær 3. Identitetsmatrise 4. Diagonal 5. Symmetrisk

Oppgave 27. *Gitt to matriser*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \text{ og } B = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -1 \\ -4 & -1 & 1 \\ -5 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Regn ut matriseproduktet $A \cdot B$.

b) Forklar hvorfor $B = A^{-1}$.

c) Hva blir produktet $B \cdot A$ og hvorfor?

d) Regn ut $C = A \cdot A^T$ og forklar hvorfor C blir en symmetrisk matrise.

Oppgave 28. *Gitt to matriser*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ og } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Regn ut matriseproduktene AB, BA og A^2.

b) Finn A^{-1}.

c) La M være en ortogonal matrise som oppfyller $M^2 = I$. Vis at da er M symmetrisk, dvs. $M = M^T$.

Regn ut den inverse til matrisene:

Oppgave 29.

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

Oppgave 30.

$$\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Oppgave 31.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Oppgave 32.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Oppgave 33.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Oppgave 34. *Vis at matrisene*

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

og

$$B = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{2} & 2 & 0 \\ \sqrt{2} & 1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

er ortogonale. Er produktene A^2, AB, BA og B^2 også ortogonale?

Regn ut determinantene:

Oppgave 35.

$$\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$$

Oppgave 36.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Oppgave 37.

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix}$$

Oppgave 38.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Oppgave 39.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & -3 \end{vmatrix}$$

Oppgave 40.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Oppgave 41.

$$\left| \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right|$$

Oppgave 42.

$$\begin{vmatrix} 100 & 200 \\ 50 & 700 \end{vmatrix}$$

Oppgave 43.

$$\left| \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \right|$$

Oppgave 44. *Vi har gitt et likningssystem*

$$\begin{aligned} x - 2y - 3z &= -2 \\ x + y + z &= 3 \\ 2x - y - 2z &= 1 \\ 3x - z &= 4 \end{aligned}$$

Er systemet overbestemt, underbestemt eller bestemt?

Løs likningssystemene:

Oppgave 45.

$$\begin{aligned} 2x+2y &= 4 \\ -2x-3y &= -5 \end{aligned}$$

Oppgave 46.

$$\begin{aligned} 4x+8y &= 6 \\ 2x+y &= -3 \end{aligned}$$

Oppgave 47.

$$\begin{aligned} x+3y &= 5 \\ 3x+y &= 7 \end{aligned}$$

Oppgave 48.

$$\begin{aligned} x+2y+3z &= 6 \\ y+2y &= 2 \\ x+6y+2z &= 5 \end{aligned}$$

Oppgave 49.

$$\begin{aligned} x+y-z &= 4 \\ x-2y+3z &= 6 \\ 2x+3y+1z &= 7 \end{aligned}$$

Regn ut det karakteristiske polynomet og finn egenverdiene til matrisene:

Oppgave 50.

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

Oppgave 51.

$$\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Oppgave 52.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Oppgave 53.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Oppgave 54.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Oppgave 55. *La*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Vis at det karakteristiske polynomet er gitt ved

$$\chi_A(\lambda) = -(\lambda - 1)(\lambda^2 - 5\lambda + 6)$$

og finn egenverdiene til matrisen. Finn også A^{-1}.

Oppgave 56. *Vis at* 2×2*-matrisene*

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \text{ og } S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

er ortogonale. Faktisk er det slik at alle ortogonale 2×2*-matriser er på formen* R_θ *eller på formen* SR_θ *for passende valg av* $\theta \in [0, 2\pi)$.

Oppgave 57. *La*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Vis at A er invertibel og finn A^{-1}. *Regn ut det karakteristiske polynomet og finn egenverdiene til A.*

Oppgave 58. *La*

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Vis at A er invertibel og finn A^{-1}. *Regn ut det karakteristiske polynomet og finn egenverdiene til A.*

Oppgave 59. *En* 2×2*-matrise A er gitt ved*

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Regn ut S^{-1}.

b) Vis at S er en ortogonal matrise.

c) Regn ut determinanten til S.

d) Finn en likevektstilstand for S.

Oppgave 60. *En* 2×2*-matrise er gitt ved*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Regn ut determinanten til A.

b) Finn A^{-1}

c) Et lineært likningssystem er gitt ved

$$\begin{aligned} x - y &= 2 \\ -x + 3y &= 4 \end{aligned}$$

Bruk b) til å løse likningsystemet.

d) Regn ut A^2.

Vi har at

$$A\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 10 \end{pmatrix}$$

e) Løs det lineære likningssystemet

$$A^2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Oppgave 61. *En 2×2-matrise er gitt ved*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Regn ut determinanten til A.

b) Finn A^{-1}

c) Et lineært likningssystem er gitt ved

$$\begin{aligned} 4x - 2y &= 2 \\ 3x - y &= 2 \end{aligned}$$

Bruk b) til å løse likningsystemet.

d) Regn ut $A^2 + 2I$.

e) Løs det lineære likningssystemet

$$(A^2 + 2I)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Oppgave 62. *En 3×3-matrise er gitt ved*

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

a) Regn ut determinanten til M.

b) Vis at $M^2 = I$.

c) Løs det lineære likningssystemet

$$\begin{aligned} x - y + 2z &= 1 \\ 2x - 2y + 2z &= 4 \\ x - \frac{1}{2}y &= -1 \end{aligned}$$

Oppgave 63. *La*

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Regn ut Householder-transformasjonen $Q_{\mathbf{v}}$ tilordnet denne vektoren. Vis at $Q_{\mathbf{v}}(\mathbf{v}) = -\mathbf{v}$. La så

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ b \end{pmatrix}$$

For reelle tall $a, b \in \mathbb{R}$. Vis at $Q_{\mathbf{v}}(\mathbf{w}) = \mathbf{w}$.

Oppgave 64. *En 3×3-matrise er gitt ved*

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Vi skal vise at A er en Householder-matrise.

a) Regn ut determinanten til A.

b) Vis at $A^2 = I$.

c) Finn det karakteristiske polynomet til A og regn ut egenverdiene.

d) La $\mathbf{w}$ være en vilkårlig vektor og regn ut $\tilde{\mathbf{w}} = \mathbf{w} - A\mathbf{w}$. Vis at

$$A\tilde{\mathbf{w}} = -\tilde{\mathbf{w}}$$

e) Vis at A er Householder-matrisen til $\tilde{\mathbf{w}}$, i.e. $A = Q_{\tilde{\mathbf{w}}}$.

Oppgave 65. *En 3×3-matrise er gitt ved*

$$A = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 8 \\ -4 & 7 & 4 \\ 8 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Vi skal vise at A er en Householder-matrise.

a) Hva er symmetrisk matrise? Er A symmetrisk?

b) Regn ut determinanten til A.

c) Vis at $A^2 = I$.

d) Finn det karakteristiske polynomet til A og regn ut egenverdiene.

d) La $\mathbf{w}$ være en vilkårlig vektor og regn ut $\tilde{\mathbf{w}} = \mathbf{w} - A\mathbf{w}$. Vis at A er Householder-matrisen til $\tilde{\mathbf{w}}$, i.e. $A = Q_{\tilde{\mathbf{w}}}$.

Oppgave 66. *En 3×3-matrise er gitt ved*

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Regn ut determinanten til A.

b) Finn det karakteristiske polynomet til A og regn ut egenverdiene.

d) La $\mathbf{w}$ *være en vilkårlig vektor og regn ut* $\tilde{\mathbf{w}} = A^2\mathbf{w} - 3A\mathbf{w} + 2\mathbf{w}$. *Vis at* $A\tilde{\mathbf{w}} = \mathbf{0}$.

Oppgave 67. *La*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0.8 & 0.6 \\ -0.8 & -0.36 & 0.48 \\ -0.6 & 0.48 & -0.64 \end{pmatrix}$$

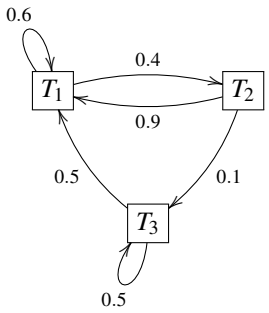
a) Vis at A er en ortogonal matrise ved å regne ut skalarproduktet mellom søylene.

b) Bruk egenskapen $A^{-1} = A^T$ *til ortogonale matriser til å øse det lineære likningssystemet*

$$\begin{aligned} 0.8x_2 + 0.6x_3 &= 5 \\ -0.8x_1 - 0.36x_2 + 0.48x_3 &= 0 \\ -0.6x_1 + 0.48x_2 - 0.64x_3 &= 0 \end{aligned}$$

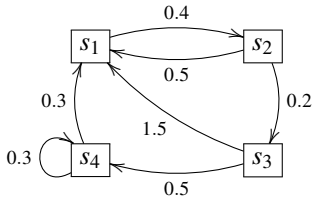
Oppgaver til kapittel 2

Oppgave 68. *En modell er gitt som i illustrasjonen.*



Still opp den tilhørende overgangsmatrisen.

Oppgave 69. *Vi betrakter et system bestående av 4 størrelser, s_1, s_2, s_3, s_4:*



Still opp den tilhørende overgangsmatrisen.

Oppgave 70. *Gitt en overgangsmatrise*

$$M = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.4 & 0.1 \\ 0.2 & 0.3 & 0 \\ 0.5 & 0.7 & 0.9 \end{pmatrix}$$

Tegn et boksdiagram som svarer til denne overgangsmatrisen.

Oppgave 71. *Gitt en overgangsmatrise*

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Tegn et boksdiagram som svarer til denne overgangsmatrisen.

Oppgave 72. *En dynamisk modell er gitt ved*

$$\mathbf{x}_{n+1} = M \cdot \mathbf{x}_n$$

der M er en 2×2-matrise gitt ved

$$M = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}$$

og $\mathbf{x}_i$ er en 2-søylevektor.

a) Gitt en tilstandsfordeling

$$\mathbf{x}_n = \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \end{pmatrix}$$

Hva blir $\mathbf{x}_{n+1}$?

b) Regn ut M^2.

c) Vi finner likevektstilstander ved å sette $\mathbf{y}_{t+1} = \mathbf{y}_t$. Finn en slik likevektstilstand $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ slik at

$$\mathbf{u} = M \cdot \mathbf{u}$$

og der $u_1 + u_2 = 300$.

Oppgave 73. *En dynamisk modell er gitt ved*

$$\mathbf{x}_{n+1} = M \cdot \mathbf{x}_n$$

der M er en 3×3-matrise gitt ved

$$M = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.8 \end{pmatrix}$$

og $\mathbf{x}_i$ er en 3-søylevektor.

a) Gitt en tilstandsfordeling

$$\mathbf{x}_n = \begin{pmatrix} 300 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Hva blir $\mathbf{x}_{n+1}$?

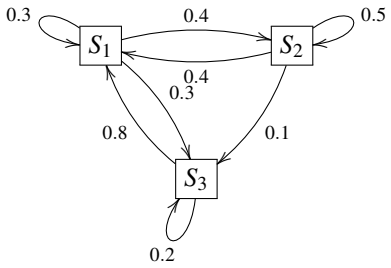
b) Regn ut M^2.

c) Vi finner likevektstilstander ved å sette $\mathbf{y}_{t+1} = \mathbf{y}_t$. Finn en slik likevektstilstand $\mathbf{u}$ slik at

$$\mathbf{u} = M \cdot \mathbf{u}$$

og der $u_1 + u_2 + u_3 = 300$.

Oppgave 74. *Et dynamisk system kan illustreres med følgende boks-diagram*



a) Skriv opp den tilhørende overgangsmatrisen til diagrammet.

b) Gitt en tilstandsvektor

$$\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ 100 \end{pmatrix}$$

Hva blir $\mathbf{x}_1$*?*

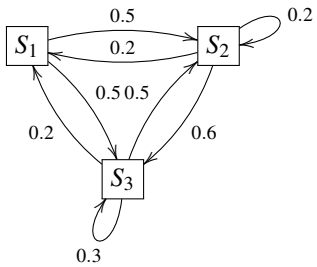
c) Regn ut M^2 *og bruk det til å regne ut* x_2*.*

c) Vi finner likevektstilstander ved å sette $\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{x}_t$*. Finn en slik likevektstilstand* $\mathbf{x}$ *slik at*

$$\mathbf{x} = M \cdot \mathbf{x}$$

og der $x_1 + x_2 + x_3 = 91$*.*

Oppgave 75. *Et dynamisk system kan illustreres med følgende boks-diagram*



a) Skriv opp den tilhørende overgangsmatrisen til diagrammet.

b) Gitt en tilstandsvektor

$$\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ 100 \end{pmatrix}$$

Hva blir $\mathbf{x}_1$*?*

c) Regn ut M^2 *og bruk det til å regne ut* $\mathbf{x}_2$*.*

c) Vis at

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 26 \\ 60 \\ 70 \end{pmatrix}$$

er en likevektstilstand for modellen.

Oppgave 76. *En dynamisk modell er gitt ved*

$$\mathbf{x}_{n+1} = M \cdot \mathbf{x}_n$$

der M er en 3×3*-matrise gitt ved*

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0.4 & 0.2 \\ 0 & 0.6 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0.6 \end{pmatrix}$$

og $\mathbf{x}_i$ *er en 3-søylevektor.*

a) Tegn et boks-diagram som illustrerer modellen.

b) Gitt en tilstandsvektor

$$\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 100 \end{pmatrix}$$

Hva blir $\mathbf{x}_1$*?*

c) Regn ut M^2 *og bruk det til å regne ut* $\mathbf{x}_2$*.*

d) Vi finner likevektstilstander ved å sette $\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{x}_t$*. Finn en likevektstilstand* $\mathbf{x}$ *slik at*

$$\mathbf{x} = M \cdot \mathbf{x}$$

og der $x_1 + x_2 + x_3 = 100$*.*

Oppgave 77. *En populasjon av øyenstikkere holder til i to dammer. Hver dag flytter 20% av øyenstikkerne i dam A seg til dam B, mens 30% av de i dam B flytter seg til dam A. Resten blir værende, og ingen forsvinner eller kommer til. Hvis vi lar* a_t *betegne antall øyenstikkere i dam A på dag t og* b_t *tilsvarende i dam B, så vil systemet kunne beskrives ved modellen*

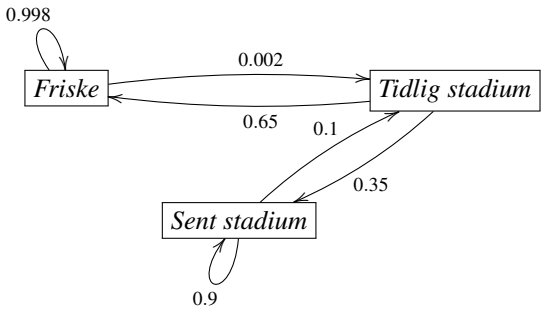
$$\begin{pmatrix} a_{t+1} \\ b_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix}$$

La M være overgangsmatrisen i modellen over. Regn ut (for hånd) M^2 *og* M^3*. Hvis vi starter med*

$$\mathbf{v}_0 = \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \end{pmatrix}$$

hva blir da $\mathbf{v}_1$ *og* $\mathbf{v}_2$*? Vi er interessert i å finne ut hva som skjer med fordelingen mellom de to dammene i det lange løp. Vil forløpet være avhengig av den opprinnelige tilstandsvektoren?*

Oppgave 78. *Vi studerer en populasjon av kvinner og deres risiko for å utvikle brystkreft. Vi deler populasjonen i tre grupper (tilstander), friske, pasienter i tidlig stadium og pasienter i sent stadium. Hvert år vil 0.2% av de friske kvinnene utvikle tidlig-stadium kreft. Resten forblir friske. Av pasientene i et tidlig stadium vil 65% blir friskmeldt i løpet av året, mens resten utvikler sykdommen til et sent stadium. Av kvinnene i den sene stadiet vil 10% ved hjelp av behandling bli brakt tilbake til en tidlig stadium tilstand, mens 90% forblir i det sene stadiet. Ingen går direkte fra et sent stadium av sykdommen til å bli frisk på et år. Modellen kan vi illustrere på denne måten*



Still opp den tilhørende overgangsmatrisen. Hvor stor andel vil etter hvert være i de ulike stadiene? Vil det være avhengig av hva som er utgangspunktet?

Oppgave 79. *Vi skal se på en modell for aldersfordeling hos ferskvannsfisken gulabbor. Vi tenker oss at i en populasjon er det ingen av individene som blir mer enn 4 år. Kun 5% av 1-åringene overlever til de blir 2 år, 20% overlever fra 2 til 3 år og 75% fra 3 til 4. De to eldste klassene produserer nye fisker, henholdsvis 100 og 150 i året pr. individ. Vi kan formulere modellen slik, der $n_{k,t}$ indikerer antall individer i aldersgruppe k ved tiden t.*

$$\begin{aligned} n_{1,t+1} &= 100n_{3,t} + 150n_{4,t} \\ n_{2,t+1} &= 0.05n_{1,t} \\ n_{3,t+1} &= 0.2n_{2,t} \\ n_{4,t+1} &= 0.75n_{3,t} \end{aligned}$$

Skriv opp overgangsmatrisen P og tegn en figur som illustrerer modellen. Regn ut P^2. Dersom vi setter

$$\mathbf{v}_0 = \begin{pmatrix} 10000 \\ 1000 \\ 500 \\ 300 \end{pmatrix}$$

hva blir da $\mathbf{v}_1$? Finn ut hvordan aldersfordelingen blir i det lange løp.

Oppgave 80. *En medisinsk preparat inntas gjennom munnen og absorberes til blodbanen via magesekken. La s_t være mengden av preparatet i magen ved tiden t, og b_t den mengden som er absorbert i blodet. For hvert tidsintervall er 50% av preparatet absorbert fra magesekken til blodbanen, og 80% av preparatet i blodbanen er metabolisert.*

Still opp en modell, inkludert figur, overgangsmatrise og likningssett. Analyser tidsforløpet av modellen.

Oppgave 81. *N studenter sitter rundt et rundt bord og spiller følgende spill: De bestemmer seg for hvert sitt tall $0 < p_j < 1$, uten å fortelle de andre hva tallet er. Hver spiller har utdelt en kapital, verdsatt til 1. Ved hver runde i spillet skal spiller j gi*

personen til høyre en andel p_j av den kapitalen hun på dette tidspunktet har til rådighet. Resten av kapitalen skal hun gi til personen på venstre side. Slik fortsetter spillet. På bakgrunn av det man stadig vekk mottar, er det om å gjøre å avdekke verdien på alle p_j.

Hvordan vil fordelingen av kapital rundt bordet være, basert på alle de individuelle p_j-ene?

Oppgaver til kapittel 3

Skriv $\mathbf{w}$ som en lineær kombinasjon av $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ (og $\mathbf{v}_3$):

Oppgave 82.

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Oppgave 83.

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Oppgave 84.

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

og

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Oppgave 85.

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

og

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Finnes det noen lineær avhengighet mellom vektorene:

Oppgave 86.

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Oppgave 87.

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Oppgave 88.

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Oppgave 89.

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Oppgave 90. *Vis at*

$$\{\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\}$$

danner en basis for $\mathbb{R}^2$.

Oppgave 91. *Vis at*

$$\{\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}\}$$

danner en basis for $\mathbb{R}^2$.

Oppgave 92. *Vis at*

$$\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\}$$

danner en basis for $\mathbb{R}^3$.

Oppgave 93. *Vis at*

$$\{\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\}$$

danner en basis for $\mathbb{R}^3$.

Oppgave 94. *Vis at*

$$\{\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}\}$$

danner en basis for $\mathbb{R}^3$.

Oppgave 95. *Hva er dimensjonen til vektorrommet generert av*

$$\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$$

Finn rangen til matrisene:

Oppgave 96.

$$\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$$

Oppgave 97.

$$\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}$$

Oppgave 98.

$$\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

Oppgave 99.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Oppgave 100.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Oppgave 101.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Oppgave 102. *Vis at mengden*

$$V = \{(a,b,0) \in \mathbb{R}^3 \,|\, a,b \in \mathbb{R}\}$$

danner et vektorrom.

Oppgave 103. *La V være mengden av funksjoner $f(x)$ definert på intervallet $[-1,1]$ slik at $f(0) = 0$. Vis at mengden danner et vektorrom.*

Oppgave 104. *La $\mathbf{w}$ være en søylevektor. Vis at mengden av søylevektorer $\mathbf{v}$ som oppfyller $\mathbf{v}^T\mathbf{w} = 0$ danner et vektorrom.*

Oppgave 105. *La V_1 og V_2 være underrom av $\mathbb{R}^n$.*

a) Vis at $V_1 \cap V_2$ også er et underrom av $\mathbb{R}^n$.

b) Vis ved et eksempel at $V_1 \cup V_2$ ikke nødvendigvis er et underrom av $\mathbb{R}^n$.

Oppgave 106. *Balanser reaksjonslikningen*

$$Cu + H_2O + SO_2 + O_2 \to Cu_3(OH)_4SO_4$$

Oppgave 107. *Balanser reaksjonslikningen*

$$PbN_6 + CrMn_2O_2 \to Pb_3O_4 + Cr_2O_3 + MnO_2 + NO$$

Oppgave 108. *Vis at mengden $\{x, x^2, x^3\}$ av polynom-funksjoner er lineært uavhengig.*

Oppgave 109. *Forklar hvorfor mengden $\{\sin^2 x, \cos^2 x, 1\}$ er lineært avhengig.*

Oppgave 110. *Vis at*

$$\{1, x+1, x^2+2x+1\}$$

danner en basis for $\mathscr{P}_2$.

Oppgave 111. *Hva er dimensjonen til vektorrommet generert av*

$$\cos 2t, \cos^2 t, \sin^2 t, 1$$

Avgjør om følgende avbildninger er lineære:

Oppgave 112. $T(x,y) = (x, 2y, x-y)$

Oppgave 113. $T(x,y) = (xy, x+y)$

Oppgave 114. $T(x,y) = (x,y,1)$

Regn ut nullrommet til matrisene:

Oppgave 115.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Oppgave 116.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Oppgave 117.

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Oppgave 118.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Oppgave 119.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{6} \\ 3 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

Oppgave 120.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Regn ut nullrommet til lineæravbildningene:

Oppgave 121. $T(x,y) = x - y$

Oppgave 122. $T(x_1,x_2,x_3) = (x_1 - x_2, x_2 - x_3)$

Oppgave 123. $T(x,y) = x$

Oppgave 124. $T(x_1,x_2,x_3) = (x_1 - 2x_2, x_2 - x_3, x_3 - x_2)$

Oppgave 125. $T(f(x)) = xf'(x) - f(x)$, $f(x) \in \mathscr{P}_3$

Oppgave 126. *Regn ut nullrommet til matrisen*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

og forklar hvorfor matrisen er invertibel.

Oppgave 127. *Vi har gitt en lineæravbildning $T : V \to W$. Vi vet at dimensjonen til nullrommet til T er 5 og rangen til T er 3. Hva er dimensjonen til V? Kan vi si noe om dimensjonen til W?*

Oppgave 128. *Derivasjonsoperatoren $D : \mathscr{P}_n \to \mathscr{P}_n$ har 1-dimensjonalt nullrom, generert av de konstante polynomene. Vi vet at dimensjonen til $\mathscr{P}_n$ er $n+1$. Hva er rangen til derivasjonsoperatoren i dette tilfellet?*

Oppgave 129. *Vi har gitt en avbildning $T : \mathscr{P}_2 \to \mathscr{P}_2$ gitt ved $f(x) \mapsto \frac{1}{2}xf'(x)$.*

a) Vis at T er en lineæravbildning.

b) Et vilkårlig element i $\mathscr{P}_2$ kan skrives på formen $f(x) = ax^2 + bx + c$. Finn et uttrykk for $T(ax^2 + bx + c)$.

c) Finn en egenfunksojn for operatoren T.

Oppgave 130. *La $a \in \mathbb{R}$ være et reelt tall. Vis at* ***evalueringsavbildningen***

$$ev_a : \mathscr{P}_2 \to \mathbb{R}$$

gitt ved $ev_a(f(x)) = f(a)$ er en lineær avbildning.

Oppgave 131. *La $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$ være et lukket og begrenset intervall. La $C(I)$ være mengden av kontinuerlige funksjoner definert på intervallet I. Vis at integrasjonsavbildningen*

$$\int : C(I) \to \mathbb{R}$$

gitt ved $f(x) \mapsto \int_a^b f(x)\,dx$ er en lineær avbildning.

Oppgave 132. *La A være en 2×2-matrise gitt ved*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

a) Regn ut det karakteristiske polynomet til A og finn egenverdiene.

b) Finn egenvektorene til A og vis at de danner en basis for $\mathbb{R}^2$.

Oppgave 133. *La A være en 2×2-matrise gitt ved*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Regn ut det karakteristiske polynomet til A og finn egenverdiene.

b) Finn egenvektorene til A. Danner de en basis for $\mathbb{R}^2$?

Oppgave 134. *Vi har gitt tre vektorer*

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},\ \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},\ \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

a) Vis at mengden $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ er lineært avhengig og finn en lineær avhengighet mellom de tre vektorene.

b) Vi lar de tre vektorene være søylene i en 3×3-matrise M.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

Vis at determinanten er 0 og forklar sammenhengen med resultatet i a).

c) La V være vektorrommet utspent av $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$. Finn en vektor i $\mathbb{R}^3$ som ikke ligger i V.

Oppgave 135. *Vi har gitt tre vektorer*

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Vi lar de tre vektorene være søylene i en 3×3-matrise M.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Regn ut determinanten til M.

b) Begrunn hvorfor mengden $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ er lineært avhengig og finn en lineær avhengighet mellom de tre vektorene.

c) La V være vektorrommet utspent av $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$. Finn en vektor i $\mathbb{R}^3$ som ikke ligger i V. Hva er dimensjonen til vektorrommet V?

Oppgave 136. *Vi har gitt tre vektorer*

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Begrunn hvorfor mengden $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ er lineært avhengig.

b) Vis at alle mulige utvalg av to av de tre vektorene $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ vil gi oss lineært uavhengige mengder.

c) La V være vektorrommet utspent av $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$. Hva er dimensjonen til dette vektorrommet?

Oppgave 137. *La V være vektorrommet utspent av*

$$\mathscr{B} = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \}$$

a) Vis at mengden $\mathscr{B}$ er lineært uavhengig.

b) Forklar hvorfor $\mathscr{B}$ danner en basis for $\mathbb{R}^3$.

c) La

$$\mathscr{B}' = \{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \}$$

Forklar hvorfor $\mathscr{B}$ og $\mathscr{B}'$ genererer samme vektorrom.

d) La

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

være søylene i en 3×3-matrise. Forklar hvorfor matrisen er invertibel.

Oppgave 138. *La V være vektorrommet utspent av*

$$\mathscr{B} = \{\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}\}$$

a) Vis at mengden $\mathscr{B}$ er lineært uavhengig.

b) Forklar hvorfor $\mathscr{B}$ danner en basis for $\mathbb{R}^2$.

c) La

$$\mathscr{S} = \{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\}$$

Forklar hvorfor $\mathscr{B}$ og $\mathscr{S}$ genererer samme vektorrom.

d) La

$$\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$$

være søylene i en 2×2-matrise. Hva er rangen til denne matrisen? Og dimensjonen til nullrommet?

Oppgave 139. *La V være vektorrommet utspent av*

$$\mathscr{B} = \{\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}\}$$

a) Vis at mengden $\mathscr{B}$ er lineært uavhengig.

b) Forklar hvorfor $\mathscr{B}$ ikke danner en basis for $\mathbb{R}^3$.

c) La

$$\mathscr{C} = \{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0\\4\\1\end{pmatrix}\}$$

Forklar hvorfor $\mathscr{B}$ og $\mathscr{C}$ genererer samme vektorrom.

d) La

$$\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0\\4\\1\end{pmatrix}$$

være søylene i en 3×3-matrise. Hva er rangen til denne matrisen? Og dimensjonen til nullrommet?

Oppgave 140. *I denne oppgaven lar vi $\mathscr{P}_2$ betegne vektorrommet av polynomer av grad mindre enn eller lik 2.*

a) Vis at 1, $x+\frac{1}{2}$ og $x^2-x+\frac{1}{6}$ danner en lineært uavhengige mengde i $\mathscr{P}_2$,

b) Vis at $\mathscr{B} = \{1, x+\frac{1}{2}, x^2-x+\frac{1}{6}\}$ gir en basis for $\mathscr{P}_2$,

c) La $D : \mathscr{P}_2 \to \mathscr{P}_2$ være derivasjonsoperatoren $D(f(x)) = f'(x)$. Skriv opp matrisen $[D]_{\mathscr{B}}$ til D relativt til basisen $\mathscr{B}$,

d) Hvor stor er rangen til D, og hva er dimensjonen til nullrommet?

Oppgave 141. *I denne oppgaven lar vi* $V = \langle e^x, e^{-x} \rangle$.

a) *Vis at* $\frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ *og* $\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ *danner en lineært uavhengige mengde i* $\mathscr{P}_2$,

b) *Vis at* $\mathscr{B} = \{\frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})\}$ *gir en basis for* V,

c) *La* $D : V \to V$ *være derivasjonsoperatoren* $D(f(x)) = f'(x)$. *Vis at operatoren faktisk er en avbildning fra* V *inn i* V.

d) *Finn en egenfunksjon for* D *i rommet* V.

Oppgave 142. *La* $V = \langle \cos x, \cos 2x, \cos 3x, \dots \rangle$.

a) *Vis at for alle positive hele tall* $m \neq n$ *så er* $\{\cos nx, \cos mx\}$ *lineært uavhengig.*

b) *Vis at Laplaceoperatoren* $\Delta = D^2$ *er en lineær operator på vektorrommet* V, *det vil si lineær og* $\Delta(\mathbf{v}) \in V$ *for alle* $\mathbf{v} \in V$. *(Definisjonen av* Δ *er gitt ved* $\Delta(f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ *for en funksjon* $f \in V$*)*

c) *Finn dimensjonen til nullrommet til* Δ *som operator på* V.

Oppgave 143. *I denne oppgaven lar vi* $\mathscr{P}_2$ *betegne vektorrommet av polynomer av grad mindre enn eller lik 2.*

a) *Definer en lineæravbildning* $E : \mathscr{P}_2 \to \mathbb{R}^3$ *ved*

$$E(f(x)) = \begin{pmatrix} f(0) \\ f(1) \\ f(2) \end{pmatrix}$$

Hvis vi bruker basisen $\mathscr{B} = \{1, x, x^2\}$ *for* $\mathscr{P}_2$ *og standardbasisen for* $\mathbb{R}^3$, *hva blir da matrisen* $[E]$ *til* E*?*

b) *Finn rangen og nullrommet til* $[E]$.

Oppgave 144. *I denne oppgaven lar vi* $V = \langle e^x, e^{-x} \rangle$ *og* $W = \mathbb{R}^2$.

a) *Definer en lineæravbildning* $T : V \to W$ *ved* $T(e^x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *og* $T(e^{-x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. *Finn nullrommet og rangen til denne avbildningen.*

b) *La nå* $S : W \to V$ *være avbildningen gitt ved* $S(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = e^x$ *og* $S(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = e^{-x}$. *Vis at* $S \circ T$ *og* $T \circ S$ *er identitetsavbildningene på henhodsvis* V *og* W.

Oppgave 145. *La* $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ *være gitt ved* $T(x) = (x, 2x, 3x)$.

a) *Vis at nullrommet til* T *er* (0). *Hva blir rangen til* T*?*

b) *Definer en lineæravbildning* $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *ved* $S(x_1, x_2, x_3) = x_1 - 2x_2 + x_3$. *Finn rangen og nullrommet til* S.

c) *?Betrakt så de sammensatte avbildningene* $S \circ T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *og* $T \circ S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. *Finn rangen og nullrommene til disse to avbildningene.*

Oppgave 146. *La $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ være lineæravbildningen gitt ved $T\mathbf{v} = A\mathbf{v}$ der A er 2×2-matrisen*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Regn ut det karakteristiske polynomet til T og finn egenverdiene.

b) Finn de tilhørende egenvektorene.

c) Vis at egenvektorene til A danner en basis for $\mathbb{R}^2$.

d) La $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Skriv $\mathbf{w}$ som en lineær kombinasjon av egenvektorer for A.

e) Regn ut $T(\mathbf{w})$ og $T(T(\mathbf{w}))$. Finn et uttrykk for $T^n(\mathbf{w})$ for en vilkårlig n. Vi skriver $T^n(x)$ for sammensetningen $T \circ T \circ T \circ \cdots \circ T$ (n ganger).

Oppgave 147. *La $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ være lineæravbildningen gitt ved $T\mathbf{v} = A\mathbf{v}$ der A er 2×2-matrisen*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Regn ut det karakteristiske polynomet til T og finn egenverdiene.

b) Finn de tilhørende egenvektorene.

c) Vis at egenvektorene til A danner en basis for $\mathbb{R}^2$.

d) La $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Skriv $\mathbf{w}$ som en lineær kombinasjon av egenvektorer for A.

e) Regn ut $T(\mathbf{w})$ og $T(T(\mathbf{w}))$. Finn et uttrykk for $T^n(\mathbf{w})$ for en vilkårlig n. Vi skriver $T^n(x)$ for sammensetningen $T \circ T \circ T \circ \cdots \circ T$ (n ganger).

Oppgave 148. *La $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ være lineæravbildningen gitt ved $T\mathbf{v} = A\mathbf{v}$ der A er 2×2-matrisen*

$$A = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.2 \\ 0.5 & 0.8 \end{pmatrix}$$

a) Regn ut det karakteristiske polynomet til T og finn egenverdiene.

b) Finn de tilhørende egenvektorene.

c) Vis at egenvektorene til A danner en basis for $\mathbb{R}^2$.

d) La $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Skriv $\mathbf{v}$ som en lineær kombinasjon av egenvektorer for A.

e) Regn ut

$$\lim_{n \to \infty} A^n \mathbf{v}$$

f) Kan du finne en vektor $\mathbf{w}$ slik at

$$\lim_{n \to \infty} A^n \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Oppgaver til kapittel 4

Oppgave 149. *Skriv opp matriseformen for rotasjonene:*

a) Med vinkel $\frac{\pi}{3}$.

b) Med vinkel $\frac{2\pi}{3}$.

c) Med vinkel $\frac{3\pi}{4}$.

d) Med vinkel 5π.

Oppgave 150. *Finn matriseformen til følgende stive bevegelser:*

a) Refleksjon om y-aksen.

b) Refleksjon om linja $y = -x$.

c) Refleksjon om linja $y = x$.

Oppgave 151. *Finn formelen for de stive bevegelsene:*

a) Refleksjon om linja $y = 2$.

b) Refleksjon om linja $x + y = 1$.

c) Refleksjon om linja $y = x + 1$.

Oppgave 152. *Finn formelen for de stive bevegelsene gitt som:*

a) Rotasjon om $(1,0)$ *med vinkel* $\frac{\pi}{2}$.

b) Rotasjon om $(1,1)$ *med vinkel* π.

c) Rotasjon om $(0,1)$ *med vinkel* $\frac{\pi}{6}$.

d) Rotasjon om $(2,0)$ *med vinkel* 4π.

Oppgave 153. *Finn formelen til følgende avbildninger:*

a) Refleksjon om linja $y = 1$*, deretter om linja* $y = 0$.

b) Rotasjon med vinkel π *om punktet* $(-1,0)$*, deretter med vinkel* π *om punktet* $(1,0)$.

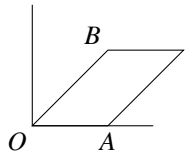
c) Refleksjon om linja $y = x$*, deretter refleksjon om linja* $y = -x$.

Oppgave 154. *Regn ut produktet av en rotasjonsmatrise om origo og en refleksjon om x-aksen.*

Oppgave 155. *Hva blir den inverse til en rotasjon med vinkel* θ *om origo?*

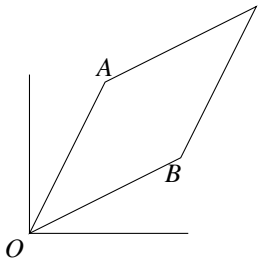
I de neste oppgavene har vi gitt en illustrasjon av bildet av enhetskvadratet ved en avbildning av planet på seg selv. Gi en formel i hvert tilfelle for denne avbildningen. Hjørnet A er bildet av $(1,0)$, mens hjørnet B er bildet av $(0,1)$.

Oppgave 156.



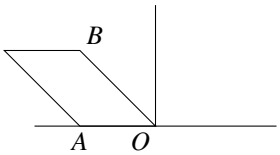
$A = (1,0)$ *og* $B = (1,1)$.

Oppgave 157.



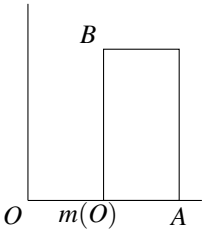
$A = (1,2)$ *og* $B = (2,1)$.

Oppgave 158.



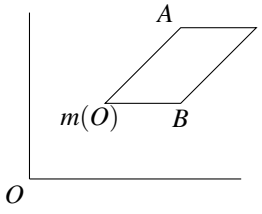
$A = (-1,0)$ *og* $B = (-1,1)$.

Oppgave 159.



$A = (2,0)$ *og* $B = (1,2)$. *Origo er flyttet til* $m(O) = (1,0)$.

Oppgave 160.



$A = (2,2)$ *og* $B = (2,1)$. *Origo er flyttet til* $m(O) = (1,1)$.

Oppgave 161. *Finn fikspunktene til avbildningen*

$$T(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Oppgave 162. *Finn fikspunktene til avbildningen*

$$T(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Oppgave 163. *Finn fikspunktene til avbildningen*

$$T(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Oppgave 164. *Finn fikspunktene til avbildningen*

$$T(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Oppgave 165. *En lineær avbildning $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ er gitt ved*

$$T(x,y) = (-y,x)$$

Skriv opp avbildningen på matriseform,

$$T(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

og beskriv firkanten som enhetskvadratet avbildes på.

Oppgave 166. *En lineær avbildning $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ er gitt ved*

$$T(x,y) = (x-y,x+y)$$

Skriv opp avbildningen på matriseform,

$$T(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

og beskriv firkanten som enhetskvadratet avbildes på.

Oppgave 167. *En avbildning $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ er gitt ved*

$$T(x,y) = (1+x,1+y)$$

Skriv opp avbildningen på matriseform,

$$T(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \mathbf{b}$$

og beskriv firkanten som enhetskvadratet avbildes på.

Oppgave 168. *En avbildning $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ er gitt ved*

$$T(x,y) = (1+y, 2+x+y)$$

Skriv opp avbildningen på matriseform,

$$T(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \mathbf{b}$$

og beskriv firkanten som enhetskvadratet avbildes på.

I de neste oppgavene skal vi finne et uttrykk for sammensettingen av to stive bevegelser, S og T. Skriv opp formler på formen

$$A\mathbf{x} + \mathbf{b}$$

for de to avbildningene og regn ut komposisjonsavbildningen $T \circ S$.

Oppgave 169. *La S være en translasjon med translat $(1,0)$ og T en translasjon med translat $(0,1)$.*

Oppgave 170. *La S være en translasjon med translat $(1,1)$ og T en rotasjon om $(1,1)$ med rotasjonsvinkel $\theta = \frac{\pi}{2}$.*

Oppgave 171. *La S være en rotasjon om punktet $(0,1)$ med rotasjonsvinkel $\theta = \frac{\pi}{2}$ og T en rotasjon om $(1,0)$ med rotasjonsvinkel $\theta = -\frac{\pi}{2}$.*

Oppgave 172. *La S være refleksjon om linja $y = x$ og T en rotasjon om $(1,0)$ med rotasjonsvinkel $\theta = -\frac{\pi}{2}$.*

Oppgave 173. *La S være en translasjon med translat $(1,-1)$ og T refleksjon om linja $y = -x$.*

Oppgave 174. *En lineær avbildning $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ er gitt ved*

$$T(x,y) = (x, x+2y)$$

a) Skriv opp avbildningen på matriseform, $T(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

b) Forklar hvorfor T avbilder enhetskvadratet på firkanten med hjørner $(0,0)$, $(1,1)$, $(0,2)$ og $(1,3)$.

c) Finn en rotasjonsmatrise ρ og en skalering X_q, gitt ved

$$\rho = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad X_q = \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

slik at produktet $X_q\rho$ avbilder hjørnet $(1,1)$ på enhetsvektoren $(1,0)$.

d) Finn en forskyvning F_k og eventuelt en skalering Y_q, gitt ved

$$F_k = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Y_q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}$$

slik at firkanten avbildes videre inn på enhetskvadratet.

e) Regn ut A^{-1} ved å gange sammen matrisene

$$Y_q,\ F_k,\ X_q,\ \rho$$

som du har funnet i c) og d).

Oppgave 175. *En lineær avbildning $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ er gitt ved*

$$T(x,y) = (-y,-x)$$

a) Skriv opp avbildningen på matriseform, $T(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

b) Forklar hvorfor T avbilder enhetskvadratet på firkanten med hjørner $(0,0)$, $(-1,0)$, $(0,-1)$ og $(-1,-1)$.

c) Finn en rotasjonsmatrise ρ og en refleksjon σ, gitt ved

$$\rho = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

slik at produktet $\rho\sigma$ endrer orienteringen på firkanten og avbilder hjørnet $(0,-1)$ på enhetsvektoren $(1,0)$.

d) Finn en forskyvning F_k og eventuelt en skalering Y_q, gitt ved

$$F_k = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Y_q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}$$

slik at firkanten avbildes videre inn på enhetskvadratet.

e) Regn ut A^{-1} ved å gange sammen matrisene

$$Y_q,\ F_k,\ \sigma,\ \rho$$

som du har funnet i c) og d).

Oppgave 176. *Gjennomfør prosedyren i de to foregående oppgavene på lineæravbildningen T gitt ved*

$$T(x,y) = (-x+y, x+y)$$

som vi illustrerer med firkanten med hjørner $(0,0)$, $(-1,1)$, $(1,1)$ og $(0,2)$.

Oppgave 177. *Vi skal finne et uttrykk for sammensettingen av to stive bevegelser. Den ene, R_1, er en rotasjon med vinkel $\frac{\pi}{2}$ om origo, og den andre, R_2, er en rotasjon med vinkel $-\frac{\pi}{2}$ og rotasjonssenter $(1,0)$.*

a) Skriv opp en formel på formen $R_i(\mathbf{v}) = A_i\mathbf{v} + \mathbf{b}_i$ for de to avbildningene.

b) Regn ut de to komposisjonsavbildningene $R_1 \circ R_2$ og $R_2 \circ R_1$. Er de like?

Oppgave 178. *Vi skal finne et uttrykk for sammensettingen av to stive bevegelser. Den ene, T, er en translasjon med translat $(1,1)$, og den andre, S, er en refleksjon med refleksjonslinje $x = 1$.*

a) Skriv opp en formel på formen $T(\mathbf{v}) = A\mathbf{v} + \mathbf{b}$ for de to avbildningene.

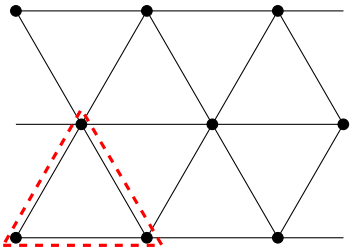
b) Regn ut de to komposisjonsavbildningene $T \circ S$ og $S \circ T$. Er de like?

Oppgave 179. *Vi skal finne et uttrykk for sammensettingen av to stive bevegelser. Den ene, S_1, er en refleksjon om linja $y = 1$, og den andre, S_2, er en refleksjon om linja $y = x$.*

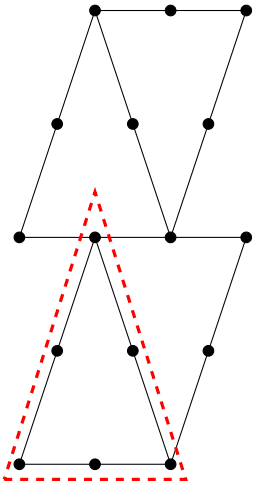
a) Finn fikspunktene til sammensettingene $S_1 \circ S_2$ og $S_2 \circ S_1$. Er de like?

b) De to sammensettingene i a) beskriver begge rotasjoner i planet. Finn rotasjonssentrene og vinkelene til de to sammensettingene. Hva er likt og hva er ikke likt for disse to avbildningene?

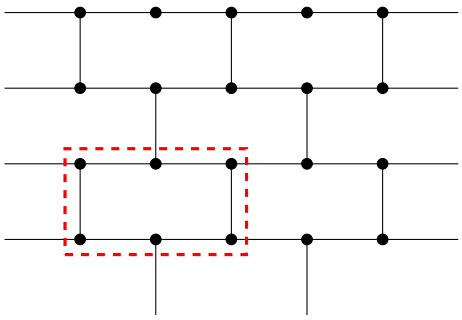
Oppgave 180. *Et plant krystallgitter er gitt som i figuren. Enhetscellen er en likesidet trekant. Beskriv (uten å regne) alle symmetriene til gitteret.*



Oppgave 181. *Et plant krystallgitter er gitt som i figuren. Enhetscellen er en likebeint trekant. Beskriv (uten å regne) alle symmetriene til gitteret.*



Oppgave 182. *Et plant krystallgitter er gitt som i figuren. Enhetscellen er et rektangel. Beskriv (uten å regne) alle symmetriene til gitteret.*



Oppgaver til kapittel 5

Oppgave 183. *Regn ut lengden av vektorene:*

a) $(1,1,2)$

b) $(-1,-2,2)$

c) $(3,1,-2)$

Oppgave 184. *Finn en vektor som står normalt på den oppgitte vektoren:*

a) $(1,0,1)$

b) $(1,2,1)$

c) $(-1,0,2)$

d) $(3,-2,-1)$

Oppgave 185. *Regn ut kryssproduktet* $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ *for de oppgitte vektorene:*

a) $\mathbf{v} = (1,0,1)$ *og* $\mathbf{w} = (0,2,-1)$

b) $\mathbf{v} = (1,-1,0)$ *og* $\mathbf{w} = (2,1,-1)$

c) $\mathbf{v} = (1,1,1)$ *og* $\mathbf{w} = (1,1,-1)$

d) $\mathbf{v} = (0,0,1)$ *og* $\mathbf{w} = (4,-1,17)$

Oppgave 186. *Regn ut kryssproduktet* $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ *for de oppgitte vektorene:*

a) $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ *og* $\mathbf{w} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j}$

b) $\mathbf{v} = -\mathbf{i} + \mathbf{k}$ *og* $\mathbf{w} = \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$

c) $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ *og* $\mathbf{w} = -\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}$

d) $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ *og* $\mathbf{w} = \mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}$

Oppgave 187. *I hvert tilfelle har vi oppgitt to vektorer,* $\mathbf{u}$ *og* $\mathbf{v}$*. Finn en tredje vektor* $\mathbf{w}$ *slik at de tre vektorene til sammen danner en basis for* $\mathbb{R}^3$*.*

a) $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *og* $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ *og* $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

c) $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *og* $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

d) $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *og* $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Oppgave 188. *I denne oppgaven har vi oppgitt en vektor,* $\mathbf{u}$*. Finn to andre vektorer* $\mathbf{v}$ *og* $\mathbf{w}$ *slik at de tre vektorene til sammen gir en basis for* $\mathbb{R}^3$*.*

a) $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

c) $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Oppgave 189. *Regn ut trippelproduktet* $[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}]$ *i hvert tilfelle:*

a)

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b)

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

c)

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Oppgave 190. *La A være matrisen gitt ved*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

og

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Regn ut trippelproduktet

$$[A\mathbf{u}, A\mathbf{v}, A\mathbf{w}]$$

Oppgave 191. *La A være matrisen gitt ved*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

og

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Regn ut trippelproduktet

$$[A\mathbf{u}, A\mathbf{v}, A\mathbf{w}]$$

Oppgave 192. *Vi har gitt en ortogonal matrise med* $\det(A) = 1$.

$$A = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 2 \\ -\sqrt{2} & -\sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$$

Finn en vektor $\mathbf{v}$ *slik at* $A\mathbf{v} = \mathbf{v}$.

Oppgave 193. *Vi har gitt en ortogonal matrise med* $\det(A) = -1$.

$$A = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

Finn en vektor $\mathbf{v}$ *slik at* $A\mathbf{v} = -\mathbf{v}$.

Oppgave 194. *Regn ut Housholder-matrisen til den oppgitte vektoren*

a) $(1,1,1)$

b) $(1,0,1)$

c) $(1,2,2)$

Oppgave 195. *La A være matrisen gitt ved*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

og

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Regn ut $A\mathbf{u} \times A\mathbf{v}$.

Oppgave 196. *Vi har gitt to refleksjoner. Den ene tar* $\mathbf{v} = (1,0,1)$ *på* $-\mathbf{v}$*, den andre tar* $\mathbf{w} = (1,0,0)$ *på* $-\mathbf{w}$*. Finn skjæringslinja mellom de to refleksjonsplanene.*

Oppgave 197. *Vi har gitt to refleksjoner. Den ene tar* $\mathbf{v} = (1,2,2)$ *på* $-\mathbf{v}$*, den andre tar* $\mathbf{w} = (0,1,-1)$ *på* $-\mathbf{w}$*. Finn skjæringslinja mellom de to refleksjonsplanene.*

Oppgave 198. *La A være matrisen gitt ved*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Finn fikspunktene til matrisen og bestem hva slags isometri den representerer.

Oppgave 199. *La A være matrisen gitt ved*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Finn fikspunktene til matrisen og bestem hva slags isometri den representerer.

Oppgave 200. *La* $\mathbf{v} = (1,1,0)$ *og* $\mathbf{w} = (0,2,-1)$ *være to vektorer i* $\mathbb{R}^3$.

a) Regn ut kryssproduktet $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$.

b) Vis ved regning at $\mathbf{v}$ *og* $\mathbf{w}$ *står normalt på kryssproduktet i a).*

c) Alternativt kan vi bruke at $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ *og* $\mathbf{w} = 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ *og regne ut kryssproduktet ved å bruke formelene for kryssproduktene mellom* $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ *og* $\mathbf{k}$. *Gjør det.*

d) La $\mathbf{u} = (1,0,1)$. *Regn ut trippelproduktet*

$$[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}]$$

e) Regn ut trippelproduktene

$$[\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{i}], \quad [\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}], \quad [\mathbf{k}, \mathbf{j}, \mathbf{i}]$$

Oppgave 201. *La* $\mathbf{v} = (1,0,1)$ *og* $\mathbf{w} = (-1,2,-1)$ *være to vektorer i* $\mathbb{R}^3$.

a) Regn ut kryssproduktet $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$.

b) Vis ved regning at $\mathbf{v}$ *og* $\mathbf{w}$ *står normalt på kryssproduktet i a).*

c) Alternativt kan vi bruke at $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{k}$ *og* $\mathbf{w} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ *og regne ut kryssproduktet ved å bruke formelene for kryssproduktene mellom* $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ *og* $\mathbf{k}$. *Gjør det.*

d) La $\mathbf{u} = (1,1,1)$. *Regn ut trippelproduktet*

$$[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}]$$

Oppgave 202. *La* $\mathbf{v} = (-2,1,3)$ *og* $\mathbf{w} = (0,1,0)$ *være to vektorer i* $\mathbb{R}^3$.

a) Regn ut kryssproduktet $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$.

b) Vis ved regning at $\mathbf{v}$ *og* $\mathbf{w}$ *står normalt på kryssproduktet i a).*

c) Alternativt kan vi bruke at $\mathbf{v} = -2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ *og* $\mathbf{w} = \mathbf{j}$ *og regne ut kryssproduktet ved å bruke formelene for kryssproduktene mellom* $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ *og* $\mathbf{k}$. *Gjør det.*

d) La $\mathbf{u} = (1,0,1)$. *Regn ut trippelproduktet*

$$[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}]$$

Oppgaver til kapittel 6

Oppgave 203. *Beskriv symmetriene til linjestykket* $L = [-1,1]$.

Oppgave 204. *Beskriv symmetriene til bokstaven E*

Oppgave 205. *Beskriv symmetriene til bokstaven H*

Oppgave 206. *Beskriv symmetriene til bokstaven S*

Oppgave 207. *Beskriv symmetriene til borden*

... H H H H H H H ...

Oppgave 208. *Beskriv symmetriene til borden*

... H S H S H S H S H ...

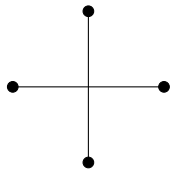
Oppgave 209. *Beskriv symmetriene til borden*

... E S E S E S E S E ...

Oppgave 210. *Beskriv symmetriene til borden*

... A S $\forall$ S A S $\forall$ S A ...

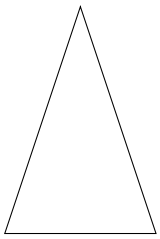
Oppgave 211. *Beskriv symmetriene til den plane figuren*



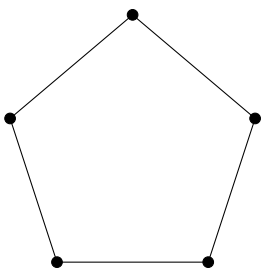
hvor de fire endepunktene har koordinater $(\pm 1,0)$ *og* $(0,\pm 1)$.

Oppgave 212. *Beskriv symmetriene til et rektangel med hjørner* $(0,0)$, $(2,0)$, $(2,1)$ *og* $(0,1)$.

Oppgave 213. *Bestem symmetriene til en likebeint trekant*

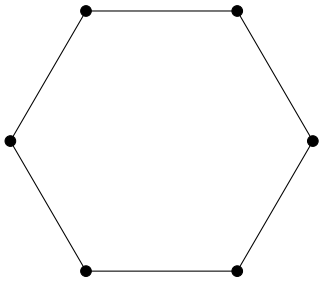


Oppgave 214. *a) Beskriv symmetriene til den regulære femkanten*



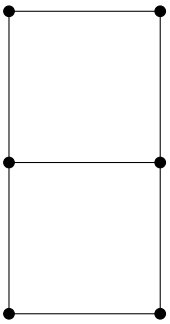
b) Hva er ordenen til symmetrigruppa til den regulære femkanten?

Oppgave 215. *a) Beskriv symmetriene til den regulære sekskanten*



b) Hva er ordenen til symmetrigruppa til den regulære sekskanten?

Oppgave 216. *a) Beskriv symmetriene til figuren*



b) Hva er ordenen til symmetrigruppa til figuren?

Oppgave 217. *a) Finn alle generatorer til den sykliske gruppa* $\mathbb{Z}_3 = \{0,1,2\}$.

b) Finn alle undergrupper til $\mathbb{Z}_3$.

Oppgave 218. *a) Finn alle generatorer til den sykliske gruppa* $\mathbb{Z}_8$.

b) Finn alle undergrupper til $\mathbb{Z}_8$.

Oppgave 219. *a) Finn alle generatorer til den sykliske gruppa* $\mathbb{Z}_{15}$.

b) Finn alle undergrupper til $\mathbb{Z}_{15}$.

Oppgave 220. *a) Skriv opp generatorer og relasjoner for den symmetriske gruppa* S_3.

b) Finn alle undergrupper til S_3.

Oppgave 221. *a) Skriv opp generatorer og relasjoner for den dihedrale gruppa* D_4.

b) Finn alle undergrupper til D_4.

Oppgave 222. *Hvilke er de to gruppene av orden 4?*

Oppgave 223. *Vis at det kun finnes en gruppe av orden 5.*

Oppgave 224. *Vis at det kun finnes en gruppe av orden p, når p er et primtall.*

Oppgave 225. *Hvilke er de to gruppene av orden 6?*

Oppgave 226. *Hva er ordenen til den ortogonale matrisen*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Oppgave 227. *Hva er ordenen til den matrisen*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Oppgave 228. *Hva er ordenen til den matrisen*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Oppgave 229. *La* $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$*, og la*

$$Q_{\mathbf{v}} = I - 2\frac{\mathbf{v}\mathbf{v}^T}{\mathbf{v}^T\mathbf{v}}$$

være den tilsvarende Householder-matrisen. Hva er ordenen til $Q_{\mathbf{v}}$*?*

Oppgave 230. *La A være matrisen gitt ved*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Forklar hvorfor A er en ortogonal matrise.

b) Finn en egenvektor med egenverdi -1.

c) Finn fikspunktene til A og bestem hva slags isometri den representerer.

Oppgave 231. *La A være matrisen gitt ved*

$$A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 3 & 4 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Forklar hvorfor A er en ortogonal matrise.

b) Finn en egenvektor med egenverdi -1.

c) Finn fikspunktene til A og bestem hva slags isometri den representerer.

Oppgave 232. *La A være matrisen gitt ved*

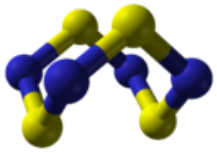
$$A = \begin{pmatrix} \frac{7}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{4}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{1}{9} & \frac{8}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{8}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

a) Forklar hvorfor A er en ortogonal matrise

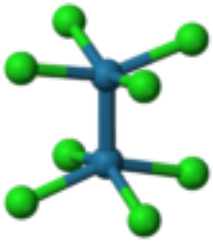
b) Finn en egenvektor med egenverdi 1.

c) Hva slags isometri representerer A?

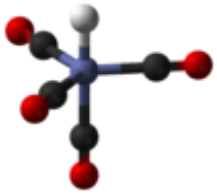
Oppgave 233. *Beskriv symmetriene til Tetrasulfur-tetranitride, S_4N_4:*



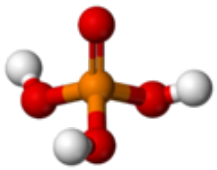
Oppgave 234. *Beskriv symmetriene til Octachlorodirhenate anion, $[Mo_2Cl_8]^{4-}$:*



Oppgave 235. *Beskriv symmetriene til Cobalt tetracarbonyl hydride, $HCo(CO)_4$:*



Oppgave 236. *Beskriv symmetriene til Fosforsyre, H_3PO_4:*



Oppgave 237. *a) Forklar hvorfor mengden av invertible 2×2-matriser danner en gruppe under multiplikasjon.*

b) Er gruppa abelsk?

Oppgave 238. *a) Forklar hvorfor mengden av ortogonale 2×2-matriser danner en gruppe under multiplikasjon.*

b) Er gruppa abelsk?

Oppgave 239. *a) Forklar hvorfor mengden av invertible øvre triangulære 2×2-matriser danner en gruppe under multiplikasjon.*

b) Er gruppa abelsk?

c) Forklar hvorfor mengden av invertible diagonale 2×2-matriser danner en undergruppe av gruppa i a). Er denne gruppa abelsk?

Oppgave 240. *a) Forklar hvorfor mengden av 2×2-matriser med determinant 1 danner en gruppe under multiplikasjon.*

b) Er gruppa abelsk?

Oppgave 241. *a) Forklar hvorfor mengden av ortogonale 3×3-matriser med en felles egenvektor $\mathbf{v}$ danner en gruppe under multiplikasjon.*

b) Er gruppa abelsk?

Oppgave 242. *a) Forklar hvorfor mengden av alle komplekse tall med absoluttverdi 1 danner en gruppe under multiplikasjon.*

b) Er gruppa abelsk?

c) Forklar sammenhengen mellom denne gruppa og symmetrigruppa til en sirkel.

Oppgave 243. *En avbildning ϕ av gruppa*

$$S_3 = \langle \rho, \mu \,|\, \rho^3 = \mu^2 = Id, \mu\rho^2 = \rho\mu \rangle$$

inn i mengden $GL(\mathbb{R}^2)$ av alle invertible 2×2-matriser er gitt ved

$$\phi(\rho) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \phi(\mu) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Vis at ϕ er en gruppehomomorfi.

b) Vis at bildet av alle elementer i S_3 fikserer x-aksen.

Oppgave 244. *Finn alle gruppe-homomorfier $K \to \mathbb{R}^*$ hvor*

$$K = \langle a, b \,|\, a^2 = b^2 = Id, ab = ba \rangle$$

og $\mathbb{R}^*$ er den multiplikative gruppa av ikke-negative reelle tall.

Oppgave 245. *Finn alle gruppe-homomorfier $G \to \mathbb{R}^*$ hvor*

$$G = \langle a, b, c \,|\, a^2 = b^2 = c^2 = Id, ab = ba, bc = cb, ac = ca \rangle$$

og $\mathbb{R}^*$ er den multiplikative gruppa av ikke-negative reelle tall.

Oppgave 246. *Finn alle homomorfier $G \to K$ og $K \to G$, der K og G er som i oppgavene over.*

Oppgave 247. *Mengden av hele tall $\mathbb{Z}$ danner en gruppe under addisjon, med enhetselement 0 og invers $-a$ til a.*

a) Vis at en gruppe-homomorfi $\phi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ er bestemt av verdien $\phi(1)$.

b) Bestem alle homomorfier $\phi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$

Oppgave 248. *La C_3 være den sykliske gruppa på 3 elementer, dvs. $C_3 = \{e, a, a^2\}$ hvor $a^3 = e$. Finn alle homomorfier $S_3 \to \mathbb{R}^*$.*

Oppgave 249. *Symmetriene til et linjestykke er gitt ved*

$$S_2 = \langle s \,|\, s^2 = Id \rangle$$

der s er speiling om midtpunktet på linjestykket. Finn alle homomorfier $S_2 \to \mathbb{R}^*$

Oppgave 250. *La*

$$S_3 = \langle s, r \,|\, s^2 = r^3 = Id, srs = r^2 \rangle$$

være symmetrigruppa til en likesidet trekant i planet.
Finn alle homomorfier $S_3 \to \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\}$.

Oppgaver til kapittel 7

Oppgave 251. *a) La* $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *og* $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$*. Regn ut det vanlige skalarproduktet* $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$.

b) Regn ut $||\mathbf{u}||$ *og* $||\mathbf{v}||$.

Oppgave 252. *a) La* $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ *og* $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$*. Regn ut det vanlige skalarproduktet* $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$.

b) Regn ut $||\mathbf{u}||$ *og* $||\mathbf{v}||$.

Oppgave 253. *La* $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 2$*,* $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = -3$ *og* $\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle = 5$*. La videre* $||\mathbf{u}|| = 1$*,* $||\mathbf{v}|| = 2$ *og* $||\mathbf{w}|| = 3$*. Regn ut*

a) $\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{v} + \mathbf{w} \rangle$*,*

b) $\langle 2\mathbf{u} - \mathbf{w}, 3\mathbf{u} + 2\mathbf{v} \rangle$

c) $||\mathbf{u} + \mathbf{v}||$

Oppgave 254. *Bruk formelen* $\langle A, B \rangle = \operatorname{tr}(A^T B)$ *for to matriser A og B til å regne ut* $\langle A, B \rangle$ *når*

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$ *og* $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ *og* $B = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ *og* $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

Oppgave 255. *Bruk formelen* $\langle A, B \rangle = \operatorname{tr}(A^T B)$ *for to matriser A og B til å regne ut* $\langle A, B \rangle$ *når*

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ *og* $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ *og* $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *og* $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Oppgave 256. *Regn ut* $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_A$ *for* $\mathbf{u} = (1,1)$ *og* $\mathbf{v} = (2,-1)$ *når*

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Oppgave 257. *Vi setter* $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_B = A\mathbf{u} \cdot A\mathbf{v}$. *Finn B når vi har*

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

(Hint: $B = A^T A$*)*

Oppgave 258. *La* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. *Finn to lineært uavhengige matriser B,C slik at indreproduktene* $\langle B, A \rangle = \langle C, A \rangle = 0$.

Oppgave 259. *La* $||\mathbf{u}|| = ||\mathbf{v}|| = \sqrt{18}$ *og* $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 9$. *Finn vinkelen mellom* $\mathbf{u}$ *og* $\mathbf{v}$.

Oppgave 260. *Vi bruker indreproduktet* $\langle A, B \rangle = \operatorname{tr}(A^T B)$ *på vektorrommet av* 2×2*-matriser. Vis at*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

oppfyller Pythagoras setning;

$$||A||^2 + ||B||^2 = ||C||^2$$

Oppgave 261. *Bruk Cauchy-Schwartz ulikhet til å vise at*

$$(a\cos\theta + b\sin\theta)^2 \leq a^2 + b^2$$

Oppgave 262. *La* $W \subset V$ *være et underrom av et endelig-dimensjonalt vektorrom. Vis at*

$$W \cap W^{\perp} = (0)$$

Oppgave 263. *La* $\mathscr{P}_2$ *være vektorrommet av polynomer av grad mindre enn eller lik 2.*

a) Vis at

$$\langle f(x), g(x) \rangle = f(-1)g(-1) + f(0)g(0) + f(1)g(1)$$

danner et indreprodukt på $\mathscr{P}_2$.

b) Finn en ortonormal basis for polynomer i $\mathscr{P}_2$ *relativt til indreproduktet i a).*

Oppgave 264. *Et indreproduktet på* $\mathscr{P}_2$ *er gitt ved* $\langle f(x), g(x) \rangle = f(-1)g(-1) + f(0)g(0) + f(1)g(1)$. *Regn ut* $\langle f(x), g(x) \rangle$ *for*

a) $f(x) = -2 + x + 3x^2$, $g(x) = 4 - 7x^2$

b) $f(x) = -5+2x+3x^2$, $g(x) = 3+2x-4x^2$

c) $f(x) = 1+x^2$, $g(x) = x-x^2$

Oppgave 265. *La V være et endelig-dimensjonalt vektorrom med indreprodukt $\langle\,,\rangle$. La $P: V \to V$ være en lineæravbildning som oppfyller $P(P(\mathbf{v})) = P(\mathbf{v})$ for alle $\mathbf{v} \in V$. Anta videre at $\langle \mathbf{u}, P(\mathbf{v})\rangle = 0$ for alle $\mathbf{v} \in V$ og alle $\mathbf{u}$ som er slik at $P(\mathbf{u}) = 0$. Vis at $\mathbf{v} - P(\mathbf{v})$ står normalt på $P(\mathbf{v})$ for alle $\mathbf{v} \in V$.*

Oppgave 266. *La $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ og $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ være to vektorer i $\mathbb{R}^2$. Vis at det vektede euklidske indreproduktet*

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = 3u_1v_1 + 2u_2v_2$$

tilfredsstiller kravene til et indreprodukt.

Oppgave 267. *La $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ og A en invertibel $n \times n$-matrise. Vis at*

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = A\mathbf{u} \cdot A\mathbf{v}$$

definerer et indreprodukt.

Oppgave 268. *La lineæravbildningen $P: V \to V$ oppfylle $\langle P(\mathbf{v}), \mathbf{v}\rangle = 0$ for alle $\mathbf{v} \in V$. Vis at P er multiplikasjon med en matrise A med $\operatorname{tr}(A) = 0$.*

Oppgave 269. *Vi har gitt tre punkter i planet P, Q og X. Vi vet at $P + Q = 0$ og at $|P| = |X|$. Vis at vinkelen mellom linjene XP og XQ er $\frac{\pi}{2}$.*

Oppgave 270. *Tre punkter i planet, $(1,3)$, $(-1,1)$ og $(1-\sqrt{2}, 1-\sqrt{2})$ ligger på en sirkel. Finn sentrum i sirkelen og bestem radiusen.*

Oppgave 271. *Et parallellogram er utspent av vektorene $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$. Vis at diagonalene i parallellogrammet står normalt på hverandre hvis og bare hvis $|\mathbf{v}| = |\mathbf{w}|$.*

Oppgave 272. *Et indreprodukt på $\mathbb{R}^3$ er gitt ved*

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle = \mathbf{v}^T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{w}$$

for $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. La

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Regn ut normen til $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ med dette indreproduktet.

b) Vis at $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ står normalt på hverandre med dette indreproduktet.

c) Regn ut $||\mathbf{v}+\mathbf{w}||$ og vis at

$$||\mathbf{v}||^2 + ||\mathbf{w}||^2 = ||\mathbf{v}+\mathbf{w}||^2$$

d) Forklar hvorfor vi kunne ha forutsagt likheten i c) uten å regne ut $||\mathbf{v}+\mathbf{w}||$.

Oppgave 273. *Et indreprodukt på $\mathbb{R}^3$ er gitt ved*

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \mathbf{v}^T \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{w}$$

for $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. La

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

a) Regn ut normen til $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ med dette indreproduktet.

b) Vis at $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ står normalt på hverandre med dette indreproduktet.

c) Regn ut $||\mathbf{v} - \mathbf{w}||$ og verifiser trekantulikheten

$$||\mathbf{v} - \mathbf{w}|| \leq ||\mathbf{v}|| + ||\mathbf{w}||$$

i dette tilfellet.

Oppgave 274. *La M_2 være vektorrommet av 2×2-matriser utstyrt med indreproduktet $\langle A, B \rangle = \operatorname{tr}(A^T B)$. La*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Regn ut normen til A, B og C.

b) Vis at A står normalt på B.

c) Verifiser at Pythagoras setning gjelder for triplet A, B, C.

Oppgave 275. *Et indreproduktet på $\mathscr{P}_2$ er gitt ved*

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_0^1 f(x) g(x)\, dx$$

La

$$f(x) = 3 - 3x, \quad g(x) = 1 - 6x + 6x^2$$

a) Regn ut normen til $f(x)$ og $g(x)$.

b) Vis at $f(x)$ og $g(x)$ er ortogonale polynomer med dette indreproduktet.

c) Forklar hvorfor

$$||f(x) + g(x)|| = ||f(x) - g(x)||$$

d) La R være "parallellogrammet"utspent av $f(x)$ og $g(x)$. Verifiser parallellogramloven

$$||f(x) + g(x)||^2 + ||f(x) - g(x)||^2 = 2||f(x)||^2 + 2||g(x)||^2$$

i dette tilfellet ved å regne ut $||f(x) + g(x)||^2$.

Oppgave 276. *Et indreproduktet på $\mathscr{P}_2$ er gitt ved*

$$\langle f(x), g(x)\rangle = \frac{1}{3}\left(f(-1)g(-1) + f(0)g(0) + f(1)g(1)\right)$$

La

$$f(x) = 1, \quad g(x) = x, \quad h(x) = x^2$$

a) Regn ut normen til $f(x)$ og $g(x)$.

b) Vis at $f(x)$ og $g(x)$ er ortogonale polynomer med dette indreproduktet.

c) Ortogonalprojeksjonen av $h(x)$ på underrommet utspent av $f(x)$ og $g(x)$ er gitt ved

$$\frac{\langle x^2, 1\rangle}{||1||^2}1 + \frac{\langle x^2, x\rangle}{||x||^2}x$$

Regn ut denne ortogonalprojeksjonen og bruk den til å finne et polynom som står normalt på 1 og x.

Oppgave 277. *Et indreprodukt på vektorrommet utspent av e^x og e^{-x} er gitt ved*

$$\langle f(x), g(x)\rangle = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$$

a) Regn ut normene til e^x og e^{-x} og indreproduktet $\langle e^x, e^{-x}\rangle$.

b) Vis at $\frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ og $\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ står normalt på hverandre.

c) Vis at

$$||\frac{1}{2}(e^x + e^{-x})||^2 = \frac{1}{4}||e^x||^2 + \frac{1}{4}||e^{-x}||^2$$

i dette tilfellet.

Fasit

Fasit til oppgaver, kapittel 1

Oppgave 1. -
Oppgave 2. a) 3 b) -1 c) 25 d) $\frac{3}{2}$
Oppgave 3.

4 : 2×2, 2×1, 2×1

17 : 2×2, 2×2, 2×2

20 : 3×4, 4×3, 3×3

21 : 3×3, 3×4, 3×4

Oppgave 4.

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Oppgave 5.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Oppgave 6.

$$\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Oppgave 7.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Oppgave 8.

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Oppgave 9.

$$(1,2)$$

Oppgave 10.

$$(1,3)$$

Oppgave 11.

$$(10,9,16)$$

Oppgave 12.

a)

$$AB = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 & 2 \\ 4 & 0 & 0 & 6 \\ 8 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, BA = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$$

b)

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Produktet $B \cdot A$ har ingen mening.

c)

$$AB = (2),\ BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

d) $AB = BA = (6)$

Oppgave 13.

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Oppgave 14.

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Oppgave 15.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Oppgave 16.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Oppgave 17.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Oppgave 18.

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Oppgave 19.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Oppgave 20.

$$\begin{pmatrix} 4 & -4 & 6 \\ 6 & -6 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Oppgave 21.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Oppgave 22.

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Oppgave 23.

$$\begin{pmatrix} \frac{11}{2} & \frac{17}{2} \\ \frac{-4}{5} & 3 \end{pmatrix}$$

Oppgave 24.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}$$

Oppgave 25.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2c & 1 \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3c & 1 \end{pmatrix}, A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ nc & 1 \end{pmatrix}$$

Oppgave 26. A - 1,2,3,4,5 B - 1 C - 2 D - 5

Oppgave 27. a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ c) $BA = I$

Oppgave 28. a) $A^2 = I$, $AB = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 1 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$,
$BA = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ b) $A^{-1} = A$

Oppgave 29.

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Oppgave 30.

$$-\frac{1}{12}\begin{pmatrix} 1 & -8 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Oppgave 31.

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Oppgave 32.

$$-\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Oppgave 33.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Oppgave 34. Produktet av to ortogonale matriser er en ortogonal matrise fordi

$$(PQ)^{-1} = Q^{-1}P^{-1} = Q^T P^T = (PQ)^T$$

Oppgave 35. 22
Oppgave 36. 2
Oppgave 37. 1
Oppgave 38. -1
Oppgave 39. 0
Oppgave 40. 1
Oppgave 41. 44
Oppgave 42. 60000
Oppgave 43. $\frac{1}{4}$
Oppgave 44. Underbestemt
Oppgave 45. $x = 1, y = 1$
Oppgave 46. $x = -\frac{5}{2}, y = 2$
Oppgave 47. $x = 2, y = 1$
Oppgave 48. $x = 3, y = 0, z = 1$
Oppgave 49. $x = 1, y = 2, z = -1$
Oppgave 50. $\lambda^2 + \lambda - 2$, Egenverdier: 1 og -2
Oppgave 51. $\lambda^2 - 5\lambda - 12$, Egenverdier: $\frac{5 \pm \sqrt{73}}{2}$
Oppgave 52. $\lambda^2 - \lambda - 1$, Egenverdier: $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$
Oppgave 53. $\lambda^2 - 2\lambda - 8$, Egenverdier: 4 og -2
Oppgave 54. $\lambda^2 - 1$, Egenverdier: 1 og -1
Oppgave 55.

$$A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Oppgave 56. -
Oppgave 57.

$$\det(A) = 4 \neq 0 \quad A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda^2 - 5\lambda + 4$$

Egenverdier: 1 og 4
Oppgave 58.

$$\det(A) = 1 \quad A^{-1} = A$$

$$\chi_A(\lambda) = -\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda + 1$$

Egenverdier: 1 og -1
Oppgave 59. a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ b) -1 c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
Oppgave 60. a) 2 b) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$
d) $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 10 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$
Oppgave 61. a) 2 b) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
d) $\begin{pmatrix} 12 & -6 \\ 9 & -3 \end{pmatrix}$ e) $x = y = 1$
Oppgave 62. a) 1 c) -1

Oppgave 63

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Oppgave 64. a) -1 c) $-\lambda^3+\lambda^2+\lambda-1$,
$\lambda_1 = 1$ (multiplisitet 2), $\lambda_2 = -1$
Oppgave 65. a) A symmetrisk b) -1
d) $-\lambda^3+\lambda^2+\lambda-1$
Oppgave 66. a) 0 b) $-\lambda^3+\frac{3}{2}\lambda^2-\frac{1}{2}\lambda$
Oppgave 67. b) $x = 0$, $y = 4$, $z = 3$

Fasit til oppgaver, kapittel 2

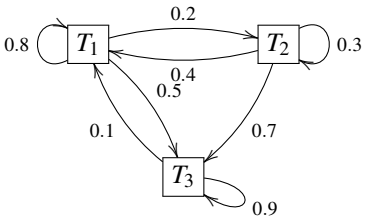
Oppgave 68.

$$\begin{pmatrix} 0.6 & 0.9 & 0.5 \\ 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0.5 \end{pmatrix}$$

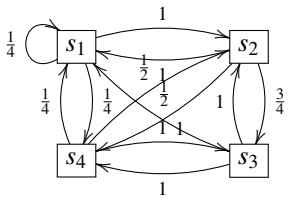
Oppgave 69.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 1.5 & 0.3 \\ 0.4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.3 \end{pmatrix}$$

Oppgave 70.



Oppgave 71.



Oppgave 72. a) $\begin{pmatrix} 120 \\ 180 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 0.68 & 0.32 \\ 0.32 & 0.68 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 150 \\ 150 \end{pmatrix}$

Oppgave 73. a) $\begin{pmatrix} 240 \\ 30 \\ 30 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 0.66 & 0.17 & 0.17 \\ 0.17 & 0.66 & 0.17 \\ 0.17 & 0.17 & 0.66 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ 100 \end{pmatrix}$

Oppgave 74. a) $\begin{pmatrix} 0.3 & 0.4 & 0.8 \\ 0.4 & 0.5 & 0 \\ 0.3 & 0.1 & 0.2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 150 \\ 90 \\ 60 \end{pmatrix}$
c) $\begin{pmatrix} 129 \\ 105 \\ 66 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 40 \\ 32 \\ 19 \end{pmatrix}$

Oppgave 75. a) $\begin{pmatrix} 0 & 0.2 & 0.2 \\ 0.5 & 0.2 & 0.5 \\ 0.5 & 0.6 & 0.3 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 40 \\ 120 \\ 140 \end{pmatrix}$
c) $\begin{pmatrix} 52 \\ 114 \\ 134 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 26 \\ 60 \\ 70 \end{pmatrix}$

Oppgave 76. b) $\begin{pmatrix} 20 \\ 20 \\ 60 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 40 \\ 24 \\ 36 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 100 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Oppgave 77.

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.45 \\ 0.3 & 0.55 \end{pmatrix}, \quad M^3 = \begin{pmatrix} 0.65 & 0.525 \\ 0.35 & 0.475 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 110 \\ 90 \end{pmatrix} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 117.5 \\ 112.5 \end{pmatrix}$$

Avhengig av summen av komponentene.

Oppgave 78.

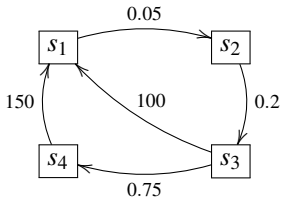
$$\begin{pmatrix} 0.998 & 0.65 & 0 \\ 0.002 & 0 & 0.1 \\ 0 & 0.35 & 0.9 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_\infty = \begin{pmatrix} 650 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Forrdelingen vil være uavhengig av startverdi.

Oppgave 79.

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 100 & 150 \\ 0.05 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.75 & 0 \end{pmatrix}$$

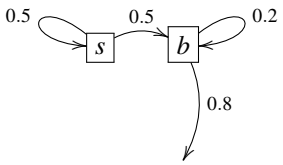
$$P^2 = \begin{pmatrix} 0 & 20 & 112.5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 7.5 \\ 0.01 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.15 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



$$\mathbf{v}_0 = \begin{pmatrix} 95000 \\ 500 \\ 200 \\ 375 \end{pmatrix}$$

Etter hvert blir fordelingen mellom komponentene (ca.) 4300:174:28:17

Oppgave 80.



$$\begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0.2 \end{pmatrix}$$

$$s_{t+1} = 0.5 s_t$$
$$b_{t+1} = 0.5 s_t + 0.2 b_t$$

Preparatet forsvinner etter hvert ut, men vil etter hvert fordele seg med forholdet $s : b = 3 : 5$.

Fasit til oppgaver, kapittel 3

Oppgave 82. $\mathbf{w} = -\mathbf{v}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{v}_2$
Oppgave 83. $\mathbf{w} = v_1 + 2\mathbf{v}_2$
Oppgave 84. $\mathbf{w} = \frac{2}{3}\mathbf{v}_1 + \frac{7}{3}\mathbf{v}_2 - \frac{1}{3}\mathbf{v}_3$
Oppgave 85. $\mathbf{w} = -\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 - -2\mathbf{v}_3$
Oppgave 86. Nei
Oppgave 87. $-2\mathbf{v}_1 + v_2 = \mathbf{0}$
Oppgave 88. $2\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$
Oppgave 89. Nei
Oppgave 90.
Oppgave 91.
Oppgave 92.
Oppgave 93.
Oppgave 94.
Oppgave 95. 2
Oppgave 96. 2
Oppgave 97. 1
Oppgave 98. 0
Oppgave 99. 3
Oppgave 100. 1
Oppgave 101. 2
Oppgave 102.
Oppgave 103.
Oppgave 104.
Oppgave 105.
Oppgave 106.

$$3Cu + 2H_2O + SO_2 + 2O_2 \rightarrow Cu_3(OH)_4SO_4$$

Oppgave 107.

$$15\,PbN_6 + 44\,Cr(MnO_4)_2 \rightarrow$$
$$5\,Pb_3O_4 + 22\,Cr_2O_3 + 88\,MnO_2 + 90\,NO$$

Oppgave 108.
Oppgave 109.
Oppgave 110.
Oppgave 111. 2
Oppgave 112. Ja
Oppgave 113. Nei
Oppgave 114. Nei
Oppgave 115. $\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$
Oppgave 116. $\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$
Oppgave 117. $\langle \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$
Oppgave 118. $\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \rangle$

Oppgave 119. $\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$

Oppgave 120. $\langle \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$

Oppgave 121. $x(1,1)$

Oppgave 122. $x_1(1,1,1)$

Oppgave 123. $y(0,1)$

Oppgave 124. $x_2(2,1,1)$

Oppgave 125. bx

Oppgave 126.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Oppgave 127. Dimensjonen til V er 8, kan ikke si noe om dimensjonen til W.

Oppgave 128. n

Oppgave 129.

a)

$$\begin{aligned} T(af+bg) &= \frac{1}{2}x\frac{d}{dx}(af+bg) \\ &= \frac{1}{2}ax\frac{df}{dx} + \frac{1}{2}bx\frac{dg}{dx} \\ &= aT(f) + bT(g) \end{aligned}$$

b)

$$T(ax^2+bx+c) = \frac{1}{2}x(2ax+b)$$

c) ax^2 og bx

Oppgave 130.

Oppgave 131.

Oppgave 132. a) $\lambda^2 - 1$, egenverdier: 1 og -1 b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Oppgave 133.a) $\lambda^2 - 2\lambda + 1$, egenverdi $\lambda = 1$ b) Egenvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, ingen basis

Oppgave 134.

Oppgave 135. a) 0 b) $(2,1,-1)$ c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 1, $\dim V = 2$

Oppgave 136. c) 2

Oppgave 137.

Oppgave 138. d) rang 2, dimensjon til nullrom 0

Oppgave 139. d) rang 2, dimensjon til nullrom 1

Oppgave 140. c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ d) rang 2, dimensjon til nullrom 1

Oppgave 141. d) e^x

Oppgave 142. c) 0

Oppgave 143. a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ b) rang 3, nullrom 0

Oppgave 144. a) rang 2, nullrom 0

Oppgave 145. a) rang 1 b) rang 1, nullrom utspent av $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ c) rang 0, dimensjon nullrom 1. rang 1, dimensjon nullrom 2

Oppgave 146. a) $\lambda^2 - 3\lambda + 2$, egenverdier 1,2 b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ d) $2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e) $2v_1 + 2^n v_2$

Oppgave 147. a) $\lambda^2 - 1$, 1, -1 b) $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ d) $-v_1 + v_2$ e) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 + (-1)^{n+1} \end{pmatrix}$

Oppgave 148. a) $\lambda^2 - 1.3\lambda + 0.3$, 1, 0.3 b) $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ d) $\frac{1}{7}(-v_1 + 5v_2)$ e) $\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Fasit til oppgaver, kapittel 4

Oppgave 149. a) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$ b) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$ c) $\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Oppgave 150. a) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Oppgave 151. a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Oppgave 152. a) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

c) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}\mathbf{x} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 2-\sqrt{3} \end{pmatrix}$ d) Identiteten

Oppgave 153. a) $\mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ b) $\mathbf{x} + \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

Oppgave 154. $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ -\sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$

Oppgave 155. Rotasjon med $-\theta$.

Oppgave 156. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

Oppgave 157. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

Oppgave 158. $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

Oppgave 159. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Oppgave 160. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Oppgave 161. $(\frac{1}{2}, \frac{1+\sqrt{2}}{2})$

Oppgave 162. $(-1,0)$

Oppgave 163. Linja $x+y+2=0$

Oppgave 164. Linja $2x-2y+1=0$

Oppgave 165. $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, hjørner: $(0,0)$ $(0,1)$ $(-1,0)$ $(-1,1)$

Oppgave 166. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, hjørner: $(0,0)$ $(1,1)$ $(-1,1)$ $(0,2)$

Oppgave 167. $\mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, hjørner: $(1,1)$ $(2,1)$ $(1,2)$ $(2,2)$

Oppgave 168. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, hjørner: $(1,2)$ $(1,3)$ $(2,3)$ $(2,4)$

Oppgave 169. $S(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $T(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $(T \circ S)(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Oppgave 170. $S(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $T(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$,

$(T \circ S)(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Oppgave 171. $S(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $T(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$(T \circ S)(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Oppgave 172. $S(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}$, $T(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,
$(T \circ S)(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Oppgave 173. $S(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $T(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}$,
$(T \circ S)(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Oppgave 174. a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ c) $\frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$
e) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Oppgave 175. a) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ c) $-I$ d) $F_k = Y_q = I$ e) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Oppgave 176.

Oppgave 177. a) $R_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $R_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ b) $(x-1, y+1)$, $(x+1, -y-1)$

Oppgave 178. a) $T: \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $S: \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, b) $TS: \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $ST: \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Oppgave 179. a) Begge har fikspunkt $(1,1)$ men ikke like. b) Senter: $(1,1)$, vinkler: $S_1S_2 : -\frac{pi}{2}$, $S_2S_1 : \frac{pi}{2}$

Oppgave 180.

Oppgave 181.

Oppgave 182.

Fasit til oppgaver, kapittel 5

Oppgave 183. a) $\sqrt{6}$ b) 3 c) $\sqrt{14}$
Oppgave 184. a) $(0,1,0)$ b) $(-2,1,0)$ c) $(0,1,0)$ d) $(2,3,0)$
Oppgave 185. a) $(-2,1,2)$ b) $(1,1,3)$ c) $(-2,2,0)$ d) $(1,4,0)$
Oppgave 186. a) $-3\mathbf{k}$ b) $-\mathbf{i}+3\mathbf{j}-\mathbf{k}$ c) 0 d) $3\mathbf{i}+4\mathbf{k}-\mathbf{k}$
Oppgave 187. a) $\mathbf{w}=\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix}$ b) $\mathbf{w}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ c) $\mathbf{w}=\begin{pmatrix}0\\-1\\-2\end{pmatrix}$ d) $\mathbf{w}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$
Oppgave 188.

a) $\mathbf{v}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\mathbf{w}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

b) $\mathbf{v}=\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$, $\mathbf{w}=\begin{pmatrix}-4\\-2\\-5\end{pmatrix}$

c) $\mathbf{v}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $\mathbf{w}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

Oppgave 189. a) 2 b) -2 c) 2
Oppgave 190. -4
Oppgave 191. 0
Oppgave 192.

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix}\sqrt{6}\\(1-\sqrt{2})(3-\sqrt{3})\\3-\sqrt{3}\end{pmatrix}$$

Oppgave 193.

$$\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

Oppgave 194. Regn ut Housholder-matrisen til den oppgitte vektoren

a) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&-2&-2\\-2&1&-2\\-2&-2&1\end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&1&0\\-1&0&0\end{pmatrix}$

c) $\frac{1}{9}\begin{pmatrix}7&-4&-4\\-4&1&-8\\-4&-8&1\end{pmatrix}$

Oppgave 195.

$$\begin{pmatrix}7\\1\\-3\end{pmatrix}$$

Oppgave 196.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Oppgave 197.

$$\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Oppgave 198.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

dvs. refleksjon + rotasjon
Oppgave 199. Linja gitt ved $(1, 0, -1)$, dvs en rotasjon
Oppgave 200. a) $(-1, 1, 2)$ d) 1 e) 0, 1, -1
Oppgave 201. a) $(-2, 0, 2)$ d) 0
Oppgave 202. a) $(-3, 0, -2)$ d) -5

Fasit til oppgaver, kapittel 6

Oppgave 203. Refleksjon $a \to -a$.
Oppgave 204. Opp-ned
Oppgave 205. Opp-ned, bak-fram, rotert
Oppgave 206. Rotert
Oppgave 207. Opp-ned, bak-fram, rotert, translasjon
Oppgave 208. Translasjon
Oppgave 209. Translasjon
Oppgave 210. Glide-refleksjon
Oppgave 211. Rotasjon av orden 4, 8 refleksjonsakser
Oppgave 212. Rotasjon av orden 2, 2 refleksjonsakser
Oppgave 213. Refleksjon om senterlinje
Oppgave 214. a) Rotasjon av orden 5, 5 refleksjonsakser b) 10
Oppgave 215. a) Rotasjon av orden 6, 12 refleksjonsakser b) 12
Oppgave 216. Rotasjon av orden 2, 2 refleksjonsakser b) 4
Oppgave 217.
a) $\mathbb{Z}_3 = \langle 1 \rangle = \langle 2 \rangle$ b)$\{0\}$, $\mathbb{Z}_3$
Oppgave 218.
a) $\mathbb{Z}_8 = \langle 1 \rangle = \langle 3 \rangle = \langle 5 \rangle = \langle 7 \rangle$ b)$\{0\}$, $\{0,4\}$, $\{0,2,4,6\}$, $\mathbb{Z}_8$
Oppgave 219.
a) $\mathbb{Z}_{15} = \langle 1 \rangle = \langle 2 \rangle = \langle 4 \rangle = \langle 7 \rangle = \langle 8 \rangle = \langle 11 \rangle = \langle 13 \rangle = \langle 14 \rangle$
b)$\{0\}$, $\{0,5,10\}$, $\{0,3,6,9,12\}$, $\mathbb{Z}_{15}$
Oppgave 220.
a) $S_3 = \langle \rho, \mu \,|\, \rho^3 = \mu^2 = Id, \rho\mu = \mu\rho^2 \rangle$ b)$\{e\}$, $\langle \rho \rangle$, $\langle \mu \rangle$, $\langle \rho\mu \rangle$, $\langle \rho^2\mu \rangle$, S_3
Oppgave 221.
a) $D_4 = \langle \rho, \mu \,|\, \rho^4 = \mu^2 = Id, \rho\mu = \mu\rho^3 \rangle$ b)$\{e\}$, $\langle \rho \rangle$, $\langle \rho^2 \rangle$, $\langle \mu \rangle$, $\langle \rho\mu \rangle$, $\langle \rho^2\mu \rangle$, $\langle \rho^3\mu \rangle$, D_4
Oppgave 222. $\mathbb{Z}_4$, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
Oppgave 223.
Oppgave 224.
Oppgave 225. $\mathbb{Z}_6$, S_3
Oppgave 226. 4
Oppgave 227. 2
Oppgave 228. 2
Oppgave 229. 2
Oppgave 230. b) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ c) Ingen fikspunkter, inversjon gjennom origo
Oppgave 231. b) $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ c) Ingen fikspunkter, inversjon gjennom origo
Oppgave 232. b) $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ c) Refleksjon om planet utspent av vektorene i b)
Oppgave 233. Rotasjon av orden 2, 2 refleksjoner, rotasjons-refleksjon av orden 4
Oppgave 234. 2 rotasjoner, orden 2 og 4, 5 refleksjoner, inversjon
Oppgave 235. Rotasjon av orden 3, 3 refleksjoner
Oppgave 236. Rotasjon av orden 3
Oppgave 237. b) Ikke abelsk

Oppgave 238. b) Ikke abelsk
Oppgave 239. b) Ikke abelsk c) Abelsk
Oppgave 240. b) Ikke abelsk
Oppgave 241. b) Ikke abelsk
Oppgave 242. b) Abelsk **Oppgave 243.**
Oppgave 244. $a, b \mapsto \pm 1$
Oppgave 245. $a, b, c \mapsto \pm 1$
Oppgave 246.
Oppgave 247. b) $\phi(1) \in \mathbb{Z}$
Oppgave 248. $a \mapsto 1$
Oppgave 249. $s \mapsto \pm 1$
Oppgave 250. $s \mapsto \pm 1$, $r \mapsto 1$

Fasit til oppgaver, kapittel 7

Oppgave 251. a) 0 b) $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$
Oppgave 252. a) -2 b) $\sqrt{14}$, $\sqrt{2}$
Oppgave 253. a) 8 b) 5 c) 3
Oppgave 254. a) 3 b) 56 c) 6
Oppgave 255.
Oppgave 256. a) 1 b) 3 c) 4
Oppgave 257. a) $\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 8 & 13 \end{pmatrix}$ a) $\begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$
Oppgave 258. F. eks. $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ og $C = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
Oppgave 259. $\frac{\pi}{3}$
Oppgave 260.
Oppgave 261.
Oppgave 262.
Oppgave 263. b) $\{\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{x}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{2}{3}}(1 - \frac{3}{2}x^2\}$
Oppgave 264. a) -14 b) -3 c) -4
Oppgave 265.
Oppgave 266.
Oppgave 267.
Oppgave 268.
Oppgave 269.
Oppgave 270. Sentrum $(1,1)$, radius 2
Oppgave 271.
Oppgave 272. a) $\sqrt{3}$, 3 c) $2\sqrt{3}$
Oppgave 273. a) $\sqrt{2}$, 1 c) $\sqrt{3}$
Oppgave 274. a) $\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$, 3
Oppgave 275. a) $\sqrt{3}$, $\frac{\sqrt{5}}{5}$
Oppgave 276. a) 1, $\sqrt{\frac{2}{3}}$ c) $\frac{2}{3}$, $x^2 - \frac{2}{3}$
Oppgave 277. a) $\frac{1}{4}(e^2 - e^{-1})$, $\frac{1}{4}(e^2 - e^{-1})$, 1