Differensial- og integralregning – og stavsprang



Arne B. Sletsjøe

Universitetet i Oslo

6,30

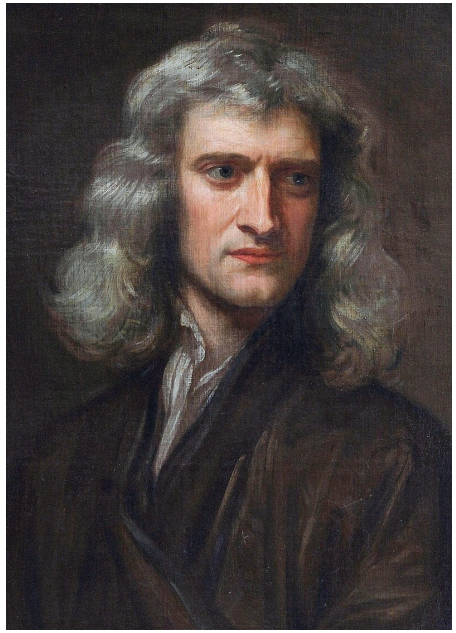
Faglig-pedagogisk dag 2025

Kortversjon:

Derivasjon og integrasjon er omvendte operasjoner.

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\ dt = f(x)$$

$$\int_a^x f'(t)\ dt = f(x) - f(a)$$



Isaac Newton
(1642-1727)

Isaac Newton var en engelsk matematiker, fysiker, astronom, alkymist, kjemiker, oppfinner og naturfilosof. Han blir betraktet som en av tidenes største vitenskapsmenn og matematikere.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\delta x}$$

$$\int_a^b f'(t)\ dt = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{b-a}{\Delta} \rfloor} f(a + k\Delta x)\Delta x$$



Gottfried Wilhelm Leibniz
(1646-1716)

Gottfried Wilhelm Leibniz var en tysk filosof og matematiker. Leibniz hadde en usedvanlig begavelse og var også aktiv som jurist, diplomat, historiker og teolog. Han står for ettertiden som en av Europas store filosofer, til tross for at hans mange andre gjøremål gjorde filosoferingen til noe av en leilighetsbeskjeftigelse.

To problemer: (fritt etter Leibniz)

Finn tangenten fra kvadraturen

Finn kvadraturen fra tangenten

$$y = 1 + 3 + 6 + 10 + 15 \ldots$$

$$dy = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \ldots (\textit{differanse})$$

$$\int y = 1 + 4 + 10 + 20 + 35 + \ldots (\textit{sum})$$

Leibniz om differensialer:

> Differensialer er ikke små, de er små i forhold til det vi sammenlikner dem med.

Leibniz om summer:

> Formelle konstruksjoner (ikke prøv å legge dem sammen)

Leibniz om sammenhengen:

> $d \int y = y$, $\int dy = y$

11. november 1673

Methodi tangentium inversae exempla

[Eksempler på metoden for inverse tangenter]

$$d(xy) \neq dx\ dy, \quad \int xy \neq \int x \int y$$

27. november 1675

Pro methodo tangentium inversa et aliis tetragonisticis specimina et inventa

[Om metoden for inverse tangenter og andre tetragonistiske eksempler og oppdagelser]

$$d(xy) = xdy + ydx$$

Theorema sane notabile et generale omnibus curvis.

Stavsprang dreier seg om å integrere, integrere, derivere, integrere og til slutt passere over lista

Duplantis setter verdensrekord: 6.29

Hvor høyt kan Armand Duplantis hoppe?

Hastighet $\mathbf{v}$ og kraft $d\mathbf{v}$ er vektorer, mens effekt $\mathbf{v} \cdot d\mathbf{v}$ og energi $\int \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v}$ er skalarer.

Et stavsprang dreier seg om å opparbeide fart (integrere $d\mathbf{v}$), å omgjøre hastighet til lagret energi i en stav ved å krumme den (integrere $\mathbf{v} \cdot d\mathbf{v}$), for så å omdanne den i staven lagrede energien (derivere energien) til å bringe utøveren opp i gravitasjonsfeltet (integrere vertikal $\mathbf{v} \cdot (-g dy \mathbf{k})$) slik at hen i et relativt stille øyeblikk langt ute i gravitasjonsfeltet kan bruke en ørliten horisontal restfart til å flytte kroppens tyngdepunkt forbi, og på undersiden (!) av lista.

Duplantis setter verdensrekord: 6.29

Energi:

$$E = E_{kin} + E_{grav} + E_{stav} + E_{rot}$$

* Kinetisk energi: E_{kin}
* Potensiell energi forårsaket av gravitasjon: E_{grav}
* Potensiell energi lagret i staven: E_{stav}
* Rotasjonsenergi (rotasjon av kroppen): E_{rot}

I det stavspranget starter:

$E_{kin}(10,3m/s)$, $E_{grav}(1,0m)$ (navlehøyde), $E_{stav} = E_{rot} = 0$

Ved passering av lista:

Vertikal hastighet: 0, horisontal hastighet: 0,1 m/s;
$E_{kin}(0,1m/s)$, $E_{grav}((h-0,2)g)$, $E_{stav} = E_{rot} = 0$

Energiregnskapet:

$$\frac{1}{2}10,3^2 + 9,81 \cdot 1 = \frac{1}{2}0,1^2 + (h-0,2) \cdot 9,81$$

som gir

I det stavspranget starter:

$E_{kin}(10,3m/s)$, $E_{grav}(1,0m)$ (navlehøyde), $E_{stav} = E_{rot} = 0$

Ved passering av lista:

Vertikal hastighet: 0, horisontal hastighet: 0,1 m/s;
$E_{kin}(0,1m/s)$, $E_{grav}((h-0,2)g)$, $E_{stav} = E_{rot} = 0$

Energiregnskapet:

$$\frac{1}{2}10,3^2 + 9,81 \cdot 1 = \frac{1}{2}0,1^2 + (h-0,2) \cdot 9,81$$

som gir

$$h = 6,60$$

Hva med å hoppe enda høyere?

$$h = h(v) = 1,2 + \frac{1}{19,62}(v^2 - 0,1^2)$$

som betyr

$$dh = \frac{1}{9,81} v \cdot dv$$

Setter vi $dv = \frac{v}{100}$ får vi

$$dh \approx \frac{v^2}{1000}$$

Hastigheten er $v \approx 10$, som gir $dh = 0,1$.

Epilog (tilbake til Leibniz):

- Finn tangenten fra kvadraturen
- Finn kvadraturen fra tangenten

Bayern, 1814

J.H.Hermann konstruerer et planimeter

(Bygger på Greens teorem, publisert i 1828)

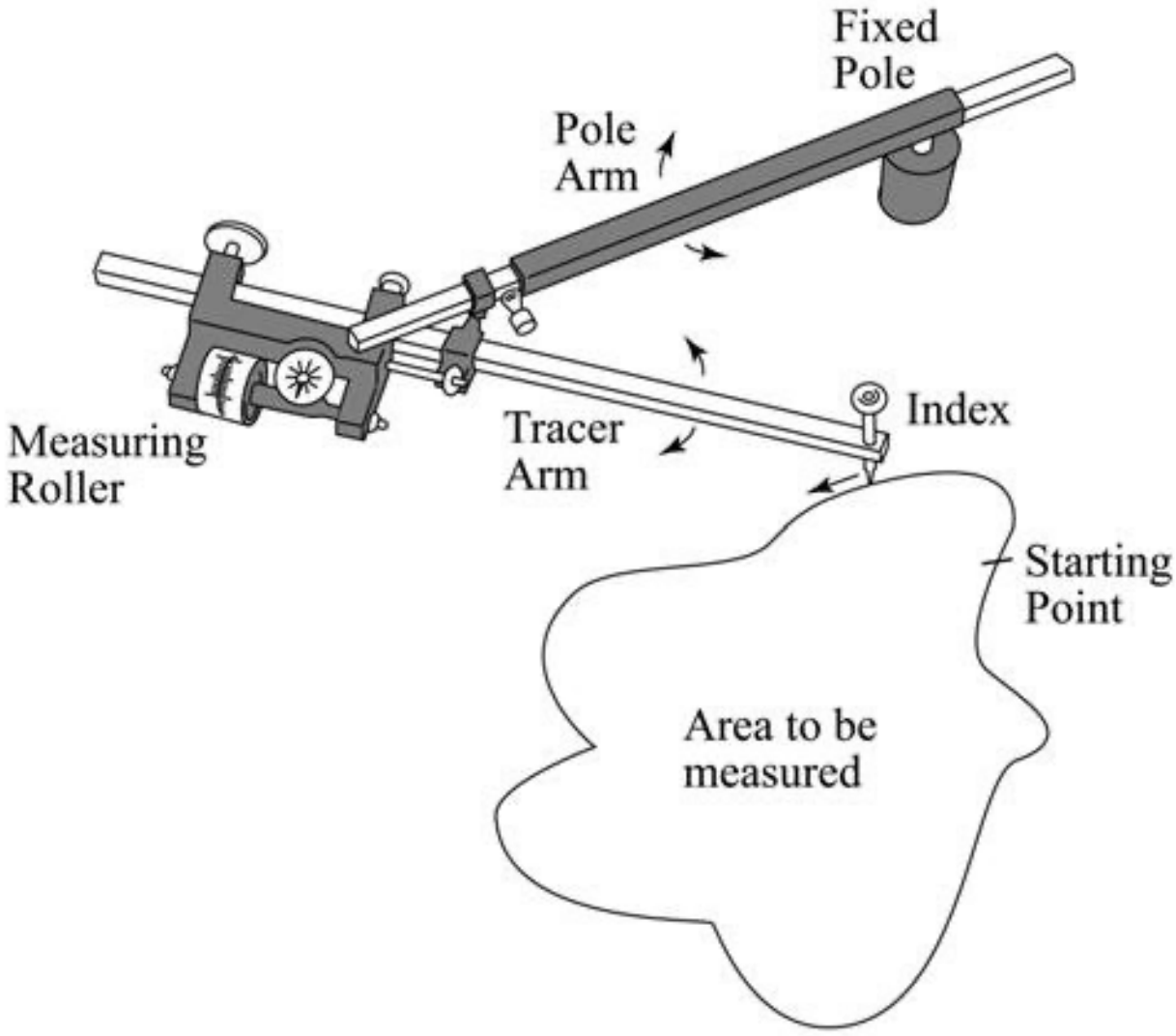
Planimeter:



Et planimeter er et instrument som kan brukes til å måle arealet av et område avgrenset av et omriss i planet. Det ble oppfunnet av den bayerske ingeniøren J.H.Hermann i 1814. Hans planimeter var et såkalt lineært planimeter, mens et polart planimeter ble konstruert av Jacob Amsler rundt 1854.



Polart planimeter



Skisse av virkemåten til et polart planimeter

To be continued ...

(Faglig-Pedagogisk Dag 2026)