Prøveeksamen, MAT 1060, våren 2025

OPPGAVE 1 Vi har gitt en 3×3-matrise

$$A = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0.4 & 0.2 & 0.4 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \end{pmatrix}$$

a) Vis at $\lambda = 1$ er en egenverdi for A og finn en tilhørende egenvektor.

b) Finn de to andre egenverdiene til A.

OPPGAVE 2 La R være en rotasjon i $\mathbb{R}^2$ med vinkel $\theta = \frac{\pi}{2}$ og rotasjonssentrum i punktet $(1, 2)$. La videre S være en refleksjon over linja $y = x + 1$. Rotasjonen R kan vi skrive som

$$R(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Finn et tilsvarende uttrykk for S, dvs. $S(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$ der A er en ortogonal 2×2-martise og $\mathbf{b}$ en vektor.

b) Komposisjonen SR gir en refleksjon. Finn refleksjonsaksen til denne refleksjonen.

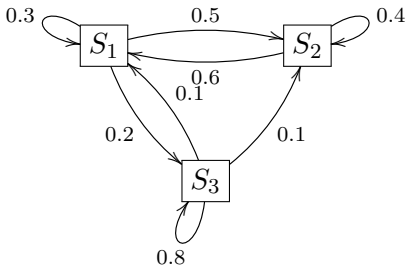
OPPGAVE 3 Vi har gitt tre vektorer

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

a) Begrunn hvorfor mengden $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ er lineært avhengig, og finn en lineær avhengighet mellom de tre vektorene.

b) Finn en vektor $\mathbf{v}$ som står normalt på $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$.

OPPGAVE 4 Et dynamisk system kan illustreres med følgende boks-diagram



a) Skriv opp den tilhørende overgangsmatrisen M til diagrammet.

b) Finn en likevektstilstand

$$\mathbf{v}_0 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

for systemet, slik at $x_1 + x_2 + x_3 = 1$.

Vektorene

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

er egenvektorer for matrisen M med egenverdier henholdsvis $\lambda_1 = 0.7$ og $\lambda_2 = -0.2$.

c) Gitt en tilstandsvektor

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Skriv $\mathbf{w}$ som en lineærkombinasjon av egenvektorene $\mathbf{v}_0$, $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$.

d) Finn et uttrykk for

$$M^n\mathbf{w}$$

for et positivt heltall n. Hva går $M^n\mathbf{w}$ mot når vi lar $n \to \infty$?

SLUTT.

Vedlegg: Noen nyttige begreper og formler:

Karakteristisk polynom: $\chi_M(\lambda) = \det(M - \lambda I)$

Egenvektorer/egenverdier: $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$, $\chi_M(\lambda) = 0$

Likevektstilstand: Egenvektor med egenverdi 1

Invers til en 2×2-matrise $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$: $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$

Rotasjon med vinkel θ om $(0,0) \in \mathbb{R}^2$: $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

Rotasjon med vinkel θ om et punkt P: $T(\mathbf{v}) = R_\theta(\mathbf{v} - P) + P$

Refleksjon om linje $ax + by = 0$: $T(\mathbf{v}) = \left(I - 2\frac{\mathbf{w}\mathbf{w}^T}{\mathbf{w}^T\mathbf{w}}\right)\mathbf{v}$, $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$

Fikspunkt for en avbildning: $T(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$