Prøveeksamen, MAT 1060, våren 2025
Løsningsforslag

OPPGAVE 1 Vi har gitt en 3×3-matrise

$$A = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0.4 & 0.2 & 0.4 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \end{pmatrix}$$

a) Vis at $\lambda = 1$ er en egenverdi for A og finn en tilhørende egenvektor.

b) Finn de to andre egenverdiene til A.

Løsning: a)

$$\det(A - 1 \cdot I) = \begin{vmatrix} 0.3-1 & 0.4 & 0.3 \\ 0.4 & 0.2-1 & 0.4 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3-1 \end{vmatrix} = 0$$

som betyr at $\lambda = 1$ er en egenverdi. Egenvektoren er gitt ved $(1, 1, 1)$.
b)

$$\det(A - \lambda I) = -(\lambda - 1)(\lambda^2 + 0.2\lambda)$$

som gir egenverdier 1, 0 og -0.2.

OPPGAVE 2 La R være en rotasjon i $\mathbb{R}^2$ med vinkel $\theta = \frac{\pi}{2}$ og rotasjonssentrum i punktet $(1, 2)$. La videre S være en refleksjon over linja $y = x + 1$. Rotasjonen R kan vi skrive som

$$R(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Finn et tilsvarende uttrykk for S, dvs. $S(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$ der A er en ortogonal 2×2-martise og $\mathbf{b}$ en vektor.

b) Komposisjonen SR gir en refleksjon. Finn refleksjonsaksen til denne refleksjonen.

Løsning: a)

$$S\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b)

$$SR\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$SR\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

gir linja $y = 2$.

Oppgave 3 Vi har gitt tre vektorer

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

a) Begrunn hvorfor mengden $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ er lineært avhengig, og finn en lineær avhengighet mellom de tre vektorene.

b) Finn en vektor $\mathbf{v}$ som står normalt på $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$.

Løsning: a)

$$\det \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x + y - 3z \\ -x + 2z \\ 4x + 2y - 2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

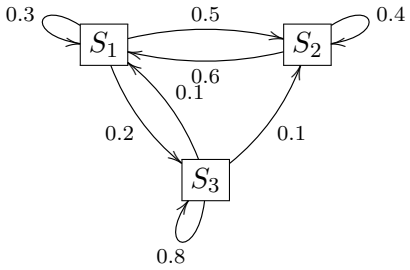
som gir

$$2 \cdot \mathbf{v}_1 - 3 \cdot \mathbf{v}_2 + 1 \cdot \mathbf{v}_3 = 0$$

b)

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 3 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Oppgave 4 Et dynamisk system kan illustreres med følgende boksdiagram



a) Skriv opp den tilhørende overgangsmatrisen M til diagrammet.

b) Finn en likevektstilstand

$$\mathbf{v}_0 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

for systemet, slik at $x_1 + x_2 + x_3 = 1$.

Vektorene

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

er egenvektorer for matrisen M med egenverdier henholdsvis $\lambda_1 = 0.7$ og $\lambda_2 = -0.2$.

c) Gitt en tilstandsvektor

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Skriv $\mathbf{w}$ som en lineærkombinasjon av egenvektorene $\mathbf{v}_0$, $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$.

d) Finn et uttrykk for

$$M^n\mathbf{w}$$

for et positivt heltall n. Hva går $M^n\mathbf{w}$ mot når vi lar $n \to \infty$?

Løsning: a)

$$M = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.6 & 0.1 \\ 0.5 & 0.4 & 0.1 \\ 0.2 & 0 & 0.8 \end{pmatrix}$$

b)

$$M \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

gir

$$\begin{aligned} 0.3x_1 + 0.6x_2 + 0.1x_3 &= x_1 \\ 0.5x_1 + 0.4x_2 + 0.1x_3 &= x_2 \\ 0.2x_1 \qquad\quad + 0.8x_3 &= x_3 \end{aligned}$$

dvs. med $x_1 + x_2 + x_3 = 1$;

$$\mathbf{v}_0 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

c)

$$\mathbf{w} = 2\mathbf{v}_0 + \tfrac{7}{9} \cdot \mathbf{v}_1 - \tfrac{1}{9}\mathbf{v}_2$$

d)

$$M^n\mathbf{w} = 2\mathbf{v}_0 + \tfrac{7}{9}(0.7)^n\mathbf{v}_1 - \tfrac{1}{9}(-0.2)^n\mathbf{v}_2 \to 2\mathbf{v}_0$$

SLUTT.