Matrisemultiplikasjon

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\cdot 1+(-2)\cdot 2 & 5\cdot(-1)+(-2)\cdot 0 & \cdots \\ (-3)\cdot 1+0\cdot 2 & \cdots & \cdots \\ & & \end{pmatrix}$$

$3\times 2 \qquad 2\times 3 \qquad\qquad 3\times 3$

Eksempel: Næringsinnhold i vafler og pannekaker

Skalarprodukt kan uttrykkes ved matrisemultiplikasjon

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\cdot(-1) + 3\cdot 1 + 1\cdot 0 = 1$$

Som matriser:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot(-1)+3\cdot 1+1\cdot 0 \end{pmatrix} = (1)$$

$1\times 3 \quad 3\times 1 \qquad 1\times 1$-matrise

Generelt, to $n\times 1$-vektorer $\bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{R}^n$

$$\boxed{\bar{v}\cdot\bar{w} = \bar{v}^T\bar{w}}$$

Kvadratiske matriser:

Spesielt fine siden $(n\times n)\cdot(n\times n) = n\times n$

(Mengden av kvadratiske $n\times n$-matriser er lukket under multiplikasjon)

Identitetsmatrise (3×3):

$$I_3 = Id = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

tilsvarende egenskap som tallet 1.

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\bar{v}\cdot Id = Id\cdot\bar{v} = \bar{v}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

kalles hoveddiagonal

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ kalles en diagonal matrise

Siden alle elementer utenfor hoveddiagonalen er 0.

Problem: Gitt $A_{n\times n}$, kan vi finne $B_{n\times n}$ slik at $AB = Id^2$.

Svar ja; $B = A^{-1}$ inversen til A

(Analogt med $2 \cdot \frac{1}{2} = 2 \cdot 2^{-1} = 1$)

$n=2$

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

men

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+2a_{21} & a_{12}+2a_{22} \\ -2a_{11}-4a_{21} & -2a_{12}-4a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

betyr bl.a. $a_{11} + 2a_{21} = 1$

$$-2a_{11} - 4a_{21} = -2\underbrace{(a_{11}+2a_{21})}_{=1} = 0$$

$\Rightarrow -2 = 0$ ikke riktig

Krav for å være invertibel (ha invers)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$$

kalles determinanten til A

For $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$: $\det(A) = 5\cdot 1 - 4\cdot 1 = 1$ $\det(A)$

For $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$: $\det(A) = 1\cdot(-4) - 2(-2) = 0$.

Formel for inverse til $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

Nyttige regneregler for inverterble matriser

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

Vi hadde: $A = A^T$ symmetrisk matrise

Hva med $A^{-1} = A^T$?

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = A^T$$

betyr $\frac{a_{22}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} = a_{11}$, $\frac{a_{11}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} = a_{22}$

$$\Rightarrow \quad (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})^2 = 1$$

dvs $\det(A) = \pm 1$

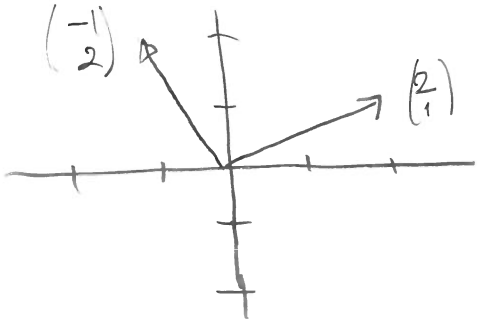
Se på tilfellet $\det(A) = 1$

$$\Rightarrow \quad a_{11} = a_{22} \text{ og } a_{21} = -a_{12}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} = a_{11}a_{12} + a_{12}a_{21} = 0$$

og $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} = a_{11}a_{11} + a_{21}a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 1$

$\Rightarrow$ Søylene har lengde 1 og står normalt på hverandre (skalarprodukt er 0)



$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

To begreper:

Øvre triangulær: $\begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Nedre triangulær: $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Øvre + nedre triangulær = Diagonal

Eks. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{1\cdot 1 - 2\cdot(-2)} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Eksempel: Householder-matrise.

Gitt vektor $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$

$$Q_{\bar{v}} = Id - 2\frac{\bar{v}\bar{v}^T}{\bar{v}^T\bar{v}}$$

$$Q_{\bar{v}}^T = Id^T - 2\left(\frac{\bar{v}\bar{v}^T}{\bar{v}^T\bar{v}}\right)^T =$$

$\boxed{Id^T = Id}$

Vi bruker at $(AB)^T = B^T A^T$ og $(A^T)^T = A$

$$= Id - 2\frac{(\bar{v}^T)^T\cdot\bar{v}^T}{\bar{v}^T\cdot(\bar{v}^T)^T} = Id - 2\frac{\bar{v}\cdot\bar{v}^T}{\bar{v}^T\cdot\bar{v}} = Q_{\bar{v}}$$

$$Q_{\bar{v}}\cdot Q_{\bar{v}} = \left(Id - 2\frac{\bar{v}\bar{v}^T}{\bar{v}^T\cdot\bar{v}}\right)\left(Id - 2\frac{\bar{v}\bar{v}^T}{\bar{v}^T\cdot\bar{v}}\right)$$

$$= Id - 4\frac{\bar{v}\bar{v}^T}{\bar{v}^T\bar{v}} + 4\cdot\frac{\bar{v}\bar{v}^T\bar{v}\bar{v}^T}{\bar{v}^T\bar{v}\,\bar{v}^T\bar{v}}$$

$$= Id - 4\frac{\bar{v}\bar{v}^T}{\bar{v}^T\bar{v}} + 4\frac{\bar{v}\bar{v}^T}{\bar{v}^T\cdot\bar{v}} = Id$$

Betyr at $Q_{\bar{v}}$ er <u>ortogonal</u> og <u>symmetrisk</u>.

Eks $\bar{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow Q_{\bar{v}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 2\frac{\left(\frac{1}{2}\right)\cdot(1\,2)}{(1\,2)\left(\frac{1}{2}\right)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$