Løse lineære likningssystemer

Mange metoder for å løse lineære likningssystemer:

I: $x + 2y = 5$

II: $3x - y = 1$

1. Innsettingsmetode:

II omformes: $y = 3x - 1$

settes inn i I: $x + 2(3x-1) = 7x - 2 = 5$

eller $7x = 7$

som gir $x = 1$ og $y = 3 \cdot 1 - 1 = 2$

2. Eliminasjon av variabel

Multiplisere II med 2:

$$\begin{array}{rr} x + 2y = 5 \\ 6x - 2y = 2 \\ \hline 7x \quad\quad = 7 \end{array}$$

3 Gauss-Jordan-eliminasjon på matriseform

Koeffisientmatrise $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

Utvidet koeffisientmatrise

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Elementær radoperasjon: $II - 3 \cdot I$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -7 & -14 \end{pmatrix}$$

Elementær radoperasjon: $-\frac{1}{7} \cdot II$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$ Trappeform

Elementær radoperasjon: $I - 2 \cdot II$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$ Redusert trappeform

Utvidet koeffisientmatrise for

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

eller $x = 1$

$y = 2$

Viktig! Elementære radoperasjoner endrer ikke løsningsmengden

Elementære radoperasjoner:

$I \leftrightarrow II$ 1) Bytte om rader

$\alpha \cdot III$ 2) Gange en rad med et tall

$II + \beta I$ 3) Legge et multiplum av en rad til en annen rad

Viktig! Elementære radoperasjoner kan utføres på likningssystemet (rad ⇔ likning) eller på den utvidede koeffisientmatrisen. Svaret blir det samme.

Eksempel.

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 1$$
$$-x_1 + 3x_2 + x_3 = 4$$
$$2x_1 - x_2 + x_3 = 3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{II+I} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{III-2I} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & -5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{5}II} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{III+5II} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{I-2II} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{3}III} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{I+III} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

svarer til $x = 1$, $y = 1$, $z = 2$

Noen spesial tilfeller:

1)

$$x + y + z = 2$$
$$x + y + z = 3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{II - I} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ svarer til $\begin{matrix} x+y+z = 2 \\ 0 = 1 \end{matrix}$

Betyr: Ingen løsning

2)

$$x + y + z = 2$$
$$2x - 3y + z = 3$$
$$x - 4y = 1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & 3 \\ 1 & -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} II - 2I \\ III - I \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -1 & -1 \\ 0 & -5 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{III - II} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

svarer til $\begin{matrix} x+y+z = 2 \\ -5y - z = -1 \\ 0 = 0 \end{matrix}$

$$\xrightarrow{II + I} \left\{ \begin{matrix} x + y + z = 2 \\ -4y = 1 \end{matrix} \right\} \xrightarrow{-\frac{1}{4}II} \left\{ \begin{matrix} x + y + z = 2 \\ y = -\frac{1}{4} \end{matrix} \right\}$$

$$\xrightarrow{I - II} \left\{ \begin{matrix} x + z = \frac{9}{4} \\ y = -\frac{1}{4} \end{matrix} \right\}$$ Løsning $\begin{matrix} x = \frac{9}{4} - z \\ y = -\frac{1}{4} \\ z = z \end{matrix}$

på vektorform $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{4} - z \\ -\frac{1}{4} \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{4} \\ -\frac{1}{4} \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Kan bruke samme metode til å regne ut inverser

Finn A^{-1} når $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{III}-2\text{II}]{\text{II}+\text{I}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{III}+\text{II}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\frac{1}{3}\text{III}]{\frac{1}{5}\text{II}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{I}-2\text{II}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right) \xrightarrow{\text{I}+\text{III}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{4}{15} & -\frac{1}{15} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right)$$

Sam betyr $A^{-1} = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 4 & -1 & 5 \\ 3 & 3 & 0 \\ -5 & 5 & 5 \end{pmatrix}$

Sjekk: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 4 & -1 & 5 \\ 3 & 3 & 0 \\ -5 & 5 & 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 15 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \end{pmatrix} = \mathrm{Id}$

Elementære radoperasjoner = Elementære matrisemult. fra venstre

Eks. 2x2

1) Ombytte $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

2) Gange med tall $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

3) Legge til $\begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -7 \end{pmatrix}$$

Elementære operasjoner E_i

$$E_n \cdots E_3 E_2 E_1 A = Id$$

betyr: $E_n \cdots E_3 E_2 E_1 Id = A^{-1}$

$$E_n \cdots E_2 E_1 (A : Id)$$
$$= (E_n \cdots E_1 A : E_n \cdots E_1 Id)$$
$$= (Id : A^{-1}).$$