Determinanter

Noen ønsker:

1. Er det mulig å se på en kvadratisk matrise om den gir en entydig løsning av likningssystemet $A\bar{x} = \bar{b}$

ekvivalent

Kan vi på en enkel måte avgjøre om en kvadratisk matrise er invertibel?

2. Kan vi finne en karakterisering av kvadratiske matriser som er "regnevennlig", dvs at den respekterer produktet

$$d(AB) = d(A) \cdot d(B), \quad d(A^{-1}) = d(A)^{-1}$$

Svar: Determinant, $\det(A)$, reelt tall

1. $\det(A) \neq 0$ betyr entydig løsning av $A\bar{x} = \bar{b}$
2. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$, $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$ og $\det(Id) = 1$

2 × 2

Generell formel: $\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

Eks.

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot 2 - 1(-3) = 4 + 3 = 7$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{B} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -8 \end{pmatrix}}_{AB}$$

$\det(A) = 7 \quad \det(B) = 1 \cdot (-1) - 2 \cdot 0 = -1$

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -8 \end{pmatrix} = 2(-8) - 3(-3) = -16 + 9 = -7$$

$$7 \cdot (-1) = -7$$

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 2 \\ x + 2y &= 3 \end{aligned}\right\} \text{ Løsning } x = y = 1 \text{ (entydig)}$$

Koeffisientmatrise $\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0$

Formel for invers:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \underbrace{\frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}}_{\det(A)} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\det \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - (-a_{12})(-a_{21}) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Regneregel

$$\det \begin{pmatrix} b a_{11} & b a_{12} \\ b a_{21} & b a_{22} \end{pmatrix} = b a_{11} b a_{22} - b a_{12} b a_{21} = b^2 \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\det \left(b \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \right)$$

$$\det A^{-1} = \left(\frac{1}{\det(A)} \right)^2 \det(A) = \frac{1}{\det(A)}$$

Generell formel:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{|\sigma|} \underbrace{a_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)}}_{\text{Ett element fra hver rad og hver søyle}}$$

± 1

antall ketuer

$a_{13}\, a_{21}\, a_{24}\, a_{32}$

3142

1342
1324
1234

} 3 ketuer, dvs -1

Finnes enklere formler for å beregne:

3x3

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Gjelder bare for 3x3 (og 2x2).

Skriv opp

$$\begin{matrix} 2 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & -2 & -1 \end{matrix} \qquad \searrow \quad \swarrow \qquad + \quad -$$

$$2\cdot 1\cdot 1 + 0\cdot 0\cdot(-2) + (-1)\cdot 1\cdot(-1)$$
$$-(-1)\cdot 1\cdot(-2) - 2\cdot 0\cdot(-1) - 0\cdot 1\cdot 1 \quad = 2+0+1-2-0-0 = \underline{\underline{1}}$$

En annen metode. (Rekursiv, helt generell)

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + (-2)\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Annen notasjon for determinant

$$= 2(1-0) - 1(0-1) - 2(0+1)$$
$$= 2+1-2 = \underline{\underline{1}}$$

Et hovedresultat (Produktformel)

$$\det(A\cdot B) = \det(A)\cdot\det(B)$$

Elementære radoperasjoner - metode

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

E_1

$$E_2 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_3 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_4 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-1&0\\0&-2&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&-2&-1\end{pmatrix}$$

$E_5 \rightarrow$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&-2&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

$E_6 \rightarrow$

Determinanten til triangulære matriser er produktet av elementene på diagonalen

$$E_6E_5E_4E_3E_2E_1A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

$\det(E_1)=1 \quad \det(E_2)=-1, \quad \det(E_3)=1, \quad \det(E_4)=-1$

$\det(E_5)=-1 \quad \det(E_6)=1$

Det betyr $\det(E_6E_5E_4E_3E_2E_1A)=\det\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$

$$\parallel$$

$$1\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot1\cdot(-1)\cdot1\cdot\det(A)=-1$$

dvs $\det(A)=1$.

Noen spesialtilfeller

To like rader gir determinant = 0

— " — søyler — " —

En rad/søyle av 0-er gir determinant = 0

$$\det(A)=\det(A^T)$$

$$\det(k\cdot A)=k^n\det(A)$$

Bytter vi om to rader / to søyler endrer det. tegn

A ortogonal dvs $A^{-1}=A^T \Rightarrow \det(A^T)=\det(A)=\frac{1}{\det(A)}$

$$\Rightarrow \det(A)=\pm1.$$