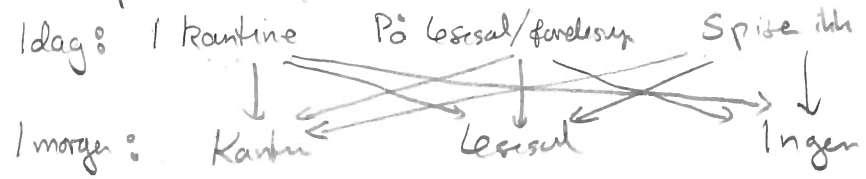
Spektralteori (Egenvektorer)

Hvor spises lunsjen?



$$A = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}7 & 0{,}4 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}1 & 0{,}5 \end{pmatrix}$$

Tilnærmet

$$A\begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31 \\ 5{,}5 \\ 8{,}5 \end{pmatrix} \xrightarrow{A} \begin{pmatrix} 35 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{A} \begin{pmatrix} 37 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Vi observerer at $A\begin{pmatrix} 39 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}9\cdot 39 + 0{,}7\cdot 5 + 0{,}4\cdot 1 \\ 0{,}1\cdot 39 + 0{,}2\cdot 5 + 0{,}1\cdot 1 \\ 0 + 0{,}1\cdot 5 + 0{,}5\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 39 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

stabil fordeling

$\bar{v} = \begin{pmatrix} 39 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ er en egenvektor for A med egenverdi 1.

Generell definisjon:

A — $n \times n$-matrise; $\bar{v} \neq \bar{0}$ — n-vektor

Vi sier at $\bar{v}$ er en egenvektor for A med egenverdi λ dersom $A \cdot \bar{v} = \lambda \cdot \bar{v}$

Eksempel $A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 & 4 & -4 \\ 4 & 1 & 8 \\ -4 & 8 & 1 \end{pmatrix}$

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -9 \\ 18 \\ -18 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \lambda = -1$$

$$A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 18 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

} Egenvektorer med egenverdi $\lambda = 1$

Hvordan regner vi ut ?

$$A\bar{v} = \lambda\bar{v} = \lambda \cdot I \cdot \bar{v} \quad , \bar{v} \neq 0$$

$$\rightarrow \quad (A - \lambda I)\bar{v} = \bar{0}$$

Likningssystemet har ikke triviell løsning.

$$\Rightarrow \quad \det(A - \lambda I) = 0$$

Vi kaller $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ det karakteristiske polynomet til den kvadratiske matrisen A.

Eksempel 1. $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det\left(\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\right)$$

$$= \begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)(-1-\lambda) - 1 \cdot 2$$

$$= \lambda^2 + 2\lambda + 1 - 2 = \lambda^2 + 2\lambda - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = \begin{cases} -1+\sqrt{2} \\ -1-\sqrt{2} \end{cases}$$

To egenverdier

Eksempel 2 $A = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}7 & 0{,}4 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}1 & 0{,}5 \end{pmatrix}$

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 0{,}9-\lambda & 0{,}7 & 0{,}4 \\ 0{,}1 & 0{,}2-\lambda & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}1 & 0{,}5-\lambda \end{vmatrix} = (0{,}9-\lambda)(0{,}2-\lambda)(0{,}5-\lambda) + 0{,}7 \cdot 0{,}1 \cdot 0 + 0{,}4 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}1$$
$$- 0{,}4 \cdot (0{,}2-\lambda) \cdot 0 - 0{,}7 \cdot 0{,}1 \cdot (0{,}5-\lambda)$$
$$- (0{,}9-\lambda) \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}1$$

$$= -\lambda^3 + 1{,}6\lambda^2 - 0{,}65\lambda + 0{,}05 = 0$$

Vanskelig å løse, men vi vet at $\lambda = 1$ er en egenverdi

$$\Rightarrow \quad (-\lambda^3 + 1{,}6\lambda^2 - 0{,}65\lambda + 0{,}05)(\lambda - 1)$$
$$= -\lambda^2 + 0{,}6\lambda - 0{,}05 = 0$$

$$-\lambda^2 + 0{,}6\lambda - 0{,}05 = 0$$

abc-formel gir $\lambda = \dfrac{-0{,}6 \pm \sqrt{0{,}36 - 0{,}2}}{-2}$

$$= \frac{-0{,}6 \pm \sqrt{0{,}16}}{-2} = \begin{cases} \dfrac{-0{,}6 + 0{,}4}{-2} \\ \dfrac{-0{,}6 - 0{,}4}{-2} \end{cases} = \begin{cases} 0{,}1 \\ 0{,}5 \end{cases}$$

Egenvektorer

$$\begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}7 & 0{,}4 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}1 & 0{,}5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 39 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}7 & 0{,}4 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}1 & 0{,}5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0{,}1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}7 & 0{,}4 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}1 & 0{,}5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0{,}5 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

8 7 4 −3
1 1 1 4
0 1 4 −1

Generell formel for 2×2:

$$\chi_A(\lambda) = \det\left[\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\right] = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21}$$

$$= \lambda^2 - \mathrm{tr}(A)\lambda + \det(A)$$

gir egenverdier $\lambda = \dfrac{\mathrm{tr}(A) \pm \sqrt{\mathrm{tr}(A)^2 - 4\det(A)}}{2}$

Men også $\lambda = \dfrac{a_{11} + a_{22} \pm \sqrt{a_{11}^2 + 2a_{11}a_{22} + a_{22}^2 - 4a_{11}a_{22} + 4a_{12}a_{21}}}{2}$

$$= \frac{a_{11} + a_{22} \pm \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21}}}{2}$$

Eksempel $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda = \dfrac{1 - 2 \pm \sqrt{(1 - (-2))^2 + 4 \cdot 2 \cdot 2}}{2}$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{9 + 16}}{2} = \begin{cases} 2 \\ -3 \end{cases}$$

evt $\lambda = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 - 4(-6)}}{2} = \dfrac{-1 \pm 5}{2} = \begin{cases} 2 \\ -3 \end{cases}$

Noen fakta:

- En nxn-matrise har n egenverdier, talt med multiplisitet
- Egenvektorer med ulik egenverdi er lineært uavhengige

Anta $A\bar{v}_1 = \lambda_1 \bar{v}_1$, $A\bar{v}_2 = \lambda_2 \bar{v}_2$ $\lambda_1 \neq \lambda_2$
og anta for motsigelse at $a\bar{v}_1 + b\bar{v}_2 = 0$, $(a,b) \neq (0,0)$

$$\Rightarrow A(a\bar{v}_1 + b\bar{v}_2) = a\lambda_1\bar{v}_1 + b\lambda_2\bar{v}_2 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1(a\bar{v}_1 + b\bar{v}_2) - (a\lambda_1\bar{v}_1 + b\lambda_2\bar{v}_2) = b(\lambda_1 - \lambda_2)\bar{v}_2 = 0$$
$$\lambda_2(\quad) - (\quad) = a(\lambda_1 - \lambda_2)\cdot\bar{v}_1 = 0$$

Men siden $(a,b) \neq (0,0)$ og $\bar{v}_1, \bar{v}_2 \neq \bar{0}$, så må $\lambda_1 - \lambda_2 = 0$. Motsigelse.

- Hvis λ er en egenverdi for A, så er λ^2 egenverdi for A^2 og $\frac{1}{\lambda}$ egenverdi for A^{-1}, osv

$$A^2\cdot\bar{v} = A(A\bar{v}) = A(\lambda\cdot\bar{v}) = \lambda^2\cdot\bar{v}$$

- A og A^T har samme egenverdier.

$$\det(A - \lambda I) = \det(A - \lambda I)^T$$
$$= \det(A^T - \lambda I).$$

- Egenverdiene til en triangulær matrise er elementene på diagonalen.
- Alle de reelle egenverdiene til en ortogonal matrise har absolutt verdi 1.

$A\bar{v} = \lambda\bar{v}$ gir $(A\bar{v})^T A\bar{v} = \bar{v}^T A^T A\bar{v} = \bar{v}^T\bar{v} > 0$
$(A\bar{v})^T A\bar{v} = (\lambda\bar{v})^T\lambda\bar{v} = \lambda^2\bar{v}^T\bar{v}$

dvs $\lambda^2 = 1$ eller $\lambda = \pm 1$

-