Spektralteori, fortsetter

Repetisjon:

A kvadratisk $n \times n$ $\quad 0 \neq \bar{v} \in \mathbb{R}^n$ vektor

$\bar{v}$ kalles en egenvektor for A med egenverdi $\lambda \in \mathbb{R}$ dersom

$$A\bar{v} = \lambda \bar{v}$$

Vi finner egenverdier ved å løse

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$$

karakteristisk polynom

Når vi har funnet λ finner vi egenvektorer ved å løse likningssystemet

$$(A - \lambda I)\bar{v} = 0$$

hvor $\bar{v} = (v_1, \dots, v_n)^T$ betraktes som n ukjente reelle tall.

Eksempel.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(2-\lambda) - (-1)(-1) = \lambda^2 - 4\lambda + 3$$

$$\chi_A(\lambda) = 0 \quad \text{gir (abc)} \quad \lambda = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \begin{cases} 1 \\ 3 \end{cases}$$

$\lambda_1 = 1$

$$\begin{pmatrix} 2-1 & -1 \\ -1 & 2-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 - v_2 \\ -v_1 + v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda_2 = 3$

$$\begin{pmatrix} 2-3 & -1 \\ -1 & 2-3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_1 - v_2 \\ -v_1 - v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = v_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Husk: $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$ lineært uavhengige (spriher i n retninger) dersom $a_1\bar{v}_1 + \dots + a_n\bar{v}_n = \bar{0}$ innebærer $a_1 = \dots = a_n = 0$

$$a_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + a_2\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - a_2 \\ a_1 + a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

betyr $a_1 = a_2 = 0$.

Fabba:

1) Egenvektorer for ulike egenverdier er lineært uavhengige

$A\bar{v}_1 = \lambda_1 \bar{v}_1$, $A\bar{v}_2 = \lambda_2 \bar{v}_2$ $\quad \lambda_1 \neq \lambda_2$

Anta for motsigelse at $a\bar{v}_1 + b\bar{v}_2 = 0$, $(a,b) \neq (0,0)$

$$\Rightarrow A(a\bar{v}_1 + b\bar{v}_2) = a \cdot \lambda_1 \bar{v}_1 + b\lambda_2 \bar{v}_2 = 0$$

To uttrykk som blir $\bar{0}$, sammen blir også $\bar{0}$.

$$\lambda_1(a\bar{v}_1 + b\bar{v}_2) - (a\lambda_1 \bar{v}_1 + b\lambda_2 \bar{v}_2) = \bar{0}$$

Dette gir. $b(\lambda_1 - \lambda_2)\bar{v}_2 = 0$

$$\lambda_2(a\bar{v}_1 + b\bar{v}_2) - (a\lambda_1 \bar{v}_1 + b\lambda_2 \bar{v}_2) = 0$$

gir $a(\lambda_1 - \lambda_2)\bar{v}_1 = 0$

Siden $\bar{v}_1, \bar{v}_2 \neq \bar{0}$ og $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$ må vi ha $a = b = 0$

Motsigelse, feil forutsetning: $(a,b) \neq (0,0)$

2) $A\bar{v} = \lambda\bar{v} \Rightarrow A^2\bar{v} = \lambda^2\bar{v}$

$$A^{-1}\bar{v} = \frac{1}{\lambda}\bar{v}$$

$$(A^3 + 4A)\bar{v} = (\lambda^3 + 4\lambda)\bar{v}.$$

3) A og A^T har samme egenverdier siden

$$\det(A - \lambda I) = \det(A^T - \lambda I)$$

(Determinant ser ikke forskjell på A og A^T)

4) Reelle egenverdier til en ortogonal matrise er ± 1

$A\bar{v} = \lambda\bar{v}$ gir

$$(A\bar{v})^T \cdot A\bar{v} = \bar{v}^T A^T A \bar{v} = \bar{v}^T \cdot \bar{v}$$

$$(A\bar{v})^T \cdot A\bar{v} = (\lambda\bar{v})^T \cdot (\lambda\bar{v}) = \lambda^2 \bar{v}^T \cdot \bar{v}$$

Som gir $\lambda^2 = 1$ siden $\bar{v}^T \cdot \bar{v} \neq \bar{0}$

5) A ortogonal $n \times n$ $\quad \det(A) = 1 \quad n$ oddetall

$$\chi_A(1) = \det(A - I) = \det(A - AA^T)$$
$$= \det(A(I - A^T)) = \det(A)\det(I - A^T)$$
$$= 1 \cdot \det((-1)(A^T - I)) = (-1)^n \det(A^T - I)$$
$$= (-1)^n \det(A - I) = (-1)^n \chi_A(1)$$

n oddetall $\Rightarrow (-1)^n = -1$ dvs.

$$\chi_A(1) = -\chi_A(1) \Rightarrow \underline{\chi_A(1) = 0}$$

så $\lambda = 1$ er en egenverdi.

6) Cayley-Hamilton: $\chi_A(A) = \bar{0}$

Eks $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad \chi_A(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 3$

$$A^2 - 4A + 3I = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^2 - 4\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

To kvadratiske matriser A, B kalles SIMILÆRE dersom $\exists$ invertibel matrise P slik at

$$B = P^{-1}AP.$$

Eksempel. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ er similære siden

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Similære matriser har samme egenverdier

$$\chi_B(\lambda) = \det(B - \lambda I) = \det(P^{-1}AP - \lambda P^{-1}P) = \det(P^{-1})\chi_A(\lambda)\det(P) = \chi_A(\lambda)$$

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\\-1&1\end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix}1&-1&3\\-1&2&6\end{pmatrix}$$

$$AB=\begin{pmatrix}1&-1&3\\1&0&6\\-2&3&-3\end{pmatrix} \quad BA=\begin{pmatrix}-4&2\\3&2\end{pmatrix}$$

$$\chi_{AB}(\lambda)=\begin{vmatrix}1-\lambda&-1&3\\1&-\lambda&6\\-2&3&-3-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)(-\lambda)(-3-\lambda)+12+9 \\ -(1-\lambda)\cdot 18+(-3-\lambda)+6(-\lambda)$$

$$=-\lambda^3-2\lambda^2+3\lambda+21-18+18\lambda-3-\lambda-6\lambda$$
$$=-\lambda^3-2\lambda^2+14\lambda=-\lambda(\lambda^2+2\lambda-14)$$

$$\chi_{BA}(\lambda)=\begin{vmatrix}-4-\lambda&2\\3&2-\lambda\end{vmatrix}=(-4-\lambda)(2-\lambda)-6=\lambda^2+2\lambda-14$$

Merk sammenhengen!

A, B kvadratiske invertible

$$\chi_{AB}(\lambda)=\det(AB-\lambda I)=\det(AB-\lambda B^{-1}B)$$
$$=\det(A-\lambda B^{-1})\det(B)$$
$$=\det(B)\det(A-\lambda B^{-1})$$
$$=\det(B(A-\lambda B^{-1}))=\det(BA-\lambda I)=\chi_{BA}(\lambda)$$

En $n\times n$-matrise har n egenverdier, men trenger ikke å ha n egenvektorer

$$A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix} \quad \chi_A(\lambda)=\begin{vmatrix}1-\lambda&1\\0&1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)^2=0$$

dvs $\lambda=1$ (multiplisitet 2)

$$\begin{pmatrix}1-1&1\\0&1-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

betyr $y=0$

Egenvektor: $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$