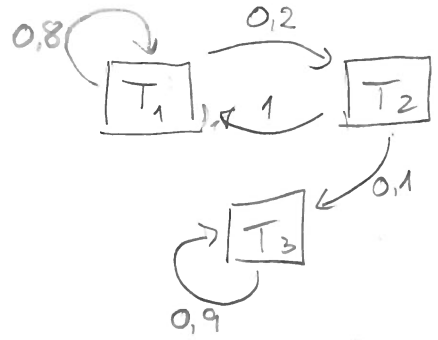
Repetisjon fra torsdag.

Eksempel



Overgangsmatrise $A = \begin{pmatrix} 0,8 & 1 & 0 \\ 0,2 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1 & 0,9 \end{pmatrix}$

Tilstandsvektor 1) $\bar{V}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $A\bar{V}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,9 \end{pmatrix}$ $A^2\bar{V}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,9^2 \end{pmatrix}$

$\therefore A^n\bar{V}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,9^n \end{pmatrix} \xrightarrow{n\to\infty} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ Egenvektor med egenverdi $0,9$

2) $\bar{W}_0 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A\bar{W}_0 = \begin{pmatrix} 0,8 & 1 & 0 \\ 0,2 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1 & 0,9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\therefore A^n\bar{W}_0 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \bar{W}_0$

$\bar{W}_0$ egenvektor med egenverdi 1. (Likevektstilstand)

Karakteristisk polynom

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 0,8-\lambda & 1 & 0 \\ 0,2 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0,1 & 0,9-\lambda \end{vmatrix} = (0,8-\lambda)(-\lambda(0,9-\lambda) - 0,2(0,9-\lambda)$$

$$= (0,9-\lambda)(\lambda^2 - 0,8\lambda - 0,2) = 0$$

gir egenverdiene $\lambda = 0,9$ $\lambda = \frac{0,8 \pm \sqrt{0,64 + 0,8}}{2} = \frac{0,8 \pm \sqrt{1,44}}{2}$

$$= \begin{cases} 1 \\ -0,2 \end{cases}$$

Egenvektor for $-0,2$ er

$$\begin{pmatrix} 0,8+0,2 & 1 & 0 \\ 0,2 & 0,2 & 0 \\ 0 & 0,1 & 1,1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ 0,2(x+y) \\ 0,1y+1,1z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gir $\bar{v}\begin{pmatrix} 11 \\ -11 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 11 \\ -11 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x+11z \\ x-11z \\ x+y+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 11 \\ 1 & 0 & -11 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 0 & 11 & a \\ 1 & 0 & -11 & b \\ 1 & 1 & 1 & c \end{array}\right) \xrightarrow{I \leftrightarrow III} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & c \\ 1 & 0 & -11 & b \\ 5 & 0 & 11 & a \end{array}\right) \xrightarrow[III-5II]{II-I} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & c \\ 0 & -1 & -12 & b-c \\ 0 & 0 & 66 & a-5b \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-1 \cdot II} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & c \\ 0 & 1 & 12 & c-b \\ 0 & 0 & 66 & a-5b \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \quad z = \frac{a-5b}{66} \qquad y = c-b-12\frac{a-5b}{66} = \frac{11c-11b-2a+10b}{11}$$

$$= \frac{11c-b-2a}{11}$$

$$x = c - \frac{11c-b-2a}{11} - \frac{a-5b}{66}$$

$$= \frac{1}{66}(66c - 66c + 6b + 12a - a + 5b)$$

$$= \frac{1}{66}(11a + 11b) = \frac{a+b}{6}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \frac{a+b}{6}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{11c-b-2a}{11}\begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{a-5b}{66}\begin{pmatrix} 11 \\ -11 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lim_{n\to\infty} A^n \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \frac{a+b}{6}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lim_{n\to\infty} \frac{11c-b-2a}{11} \cdot 0{,}9^n \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$+ \lim_{n\to\infty} \frac{a-5b}{66}(-0.2)^n \begin{pmatrix} 11 \\ -11 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{a+b}{6}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lukket system: • Overgangsmatrisen A har ikke-negative elementer og $\sigma(\bar{v}) = \sigma(A\bar{v})$

Skal vise $\Leftrightarrow$ ikke-negative elementer og søylesum = 1

Bevis: $\bar{e}_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow$ rad j $A\bar{e}_j$: j-te søyle i A

- Hvis $\sigma(\bar{v}) = \sigma(A\bar{v})$ betyr det at $\sigma(\bar{e}_j) = \sigma(A\bar{e}_j)$, $\sigma(\bar{e}_j) = 1$

$\Rightarrow$ Søylesummen er 1

- Dersom søylesummene er 1, så er $\sigma(A\bar{e}_j) = 1$

Men $\sigma(\bar{e}_j) = 1$, så $\sigma(\bar{e}_j) = \sigma(A\bar{e}_j)$

Vi har $\sigma(\bar{u}+\bar{v}) = \sigma(\bar{u}) + \sigma(\bar{v})$ som betyr at

$$\sigma\left(\sum b_j \bar{e}_j\right) = \sum b_j \sigma(\bar{e}_j) = \sum b_j$$

$$\sigma\left(A\left(\sum b_j \bar{e}_j\right)\right) = \sigma\left(\sum b_j A\bar{e}_j\right) = \sum b_j \sigma(A\bar{e}_j) = \sum b_j$$

dvs $\sigma(\bar{u}) = \sigma(A\bar{u})$ $\forall \bar{u}$

Et hvert lukket system har en likevektstilstand

dvs $\lambda = 1$ er en egenverdi

Bevis Likevektstilstand $\bar{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ $A = (a_{ij})$

$$\begin{aligned} a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + \cdots + a_{1n}v_n &= v_1 \\ a_{21}v_1 + a_{22}v_2 + \cdots + a_{2n}v_n &= v_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}v_1 + a_{n2}v_2 + \cdots + a_{nn}v_n &= v_n \end{aligned}$$

Siste likning $\left(1 - \sum_{j=1}^{n-1} a_{j1}\right)v_1 + \left(1 - \sum_{j=1}^{n-1} a_{j2}\right)v_2 + \cdots + \left(1 - \sum_{j=1}^{n-1} a_{jn}\right)v_n$

$$= (v_1 + v_2 + \cdots + v_n) - (v_1 + \cdots + v_{n-1}) = v_n$$

følger av de andre likningen, som betyr at systemet har en ikke-trivell løsning mao en egenvektor.

Hvis λ er egenverdi for en stokastisk matrise A, så er $|\lambda| \leq 1$.

Bevis. λ er også egenverdi for A^T, med egenvektor $\bar{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow A^T \bar{v} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}v_1 + \cdots + a_{n1}v_n \\ \vdots \\ a_{1n}v_1 + \cdots + a_{nn}v_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

Anta v_j har størst absoluttverdi av $v_1, \ldots, v_n$

Rad j: $a_{1j}v_1 + \cdots + a_{nj}v_n = \lambda \cdot v_j$

$$\Rightarrow |v_j| \cdot |\lambda| = |a_{1j}v_1 + \cdots + a_{nj}v_n|$$

$$\leq |a_{1j}v_1| + \cdots + |a_{nj}v_n|$$

$$= a_{1j}|v_1| + \cdots + a_{nj}|v_n| \qquad a_{ij} \geq 0$$

$$\leq a_{1j}|v_j| + \cdots + a_{nj}|v_j|$$

$$= (a_{1j} + \cdots + a_{nj})|v_j| \qquad \text{søylesum}$$

$$= |v_j|$$

Siden $|v_j| \neq 0$ får vi $|\lambda| \leq 1$

Hvis $|\lambda| = 1$ betyr det at $\bar{v} = \begin{pmatrix} v_j \\ \vdots \\ v_j \end{pmatrix} = v_j \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$. Men

$$A^T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + \cdots + a_{n1} \\ \vdots \\ a_{1n} + \cdots + a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

siden dette er søylesummer i A.

$$\Rightarrow \underline{\lambda = 1}$$