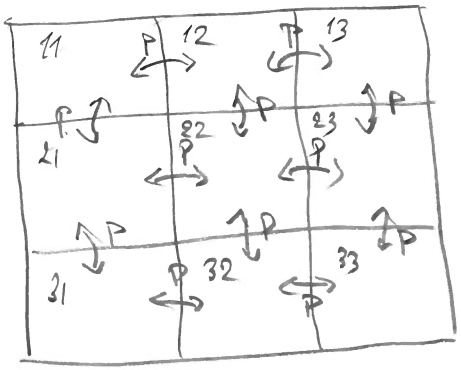
Ett exempel, dynamiskt system



$A =$

	11	12	13	21	22	23	31	32	33
11	$1-2p$	p	0	p	0	0	0	0	0
12	p	$1-3p$	p	0	p	0	0	0	0
13	0	p	$1-2p$	0	0	p	0	0	0
21									
22					$1-4p$				
23									
31									
32									
33									

etc

$p = 0{,}1$

$$\bar{v}_0 = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad A^{10}\bar{v}_0 = \begin{pmatrix} 2{,}32 \\ 1{,}50 \\ 0{,}79 \\ 1{,}50 \\ 0{,}94 \\ 0{,}47 \\ 0{,}79 \\ 0{,}47 \\ 0{,}21 \end{pmatrix}$$

2,32	1,50	0,79
1,50	0,94	0,47
0,79	0,47	0,21

$$A^{50}\bar{v}_0 = \begin{pmatrix} 1{,}02 \\ 1{,}01 \\ 1{,}00 \\ 1{,}01 \\ 1{,}00 \\ 0{,}99 \\ 1{,}00 \\ 0{,}99 \\ 0{,}98 \end{pmatrix}$$

Likevektstillstånd: $\bar{v}_\infty = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Karaktäristisk polynom

$$\chi_A(\lambda) = -(\lambda-1)(\lambda-1+p)^2(\lambda-1+2p)(\lambda-1+3p)^3(\lambda-1+4p)(\lambda-1+6p)$$

Egenvärdena $1,\ 1-p\ (2),\ 1-2p,\ 1-3p\ (3),\ 1-4p,\ 1-6p$

Euklidske vektorrom

$V = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_m\}$

Lineærkombinasjon: $a_1\bar{v}_1 + a_2\bar{v}_2 + \dots + a_m\bar{v}_m \quad a_i \in \mathbb{R}$.

Lineær uavhengighet $\sum_{i=1}^{m} a_i\bar{v}_i = \bar{0} \Rightarrow a_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, m$

Motsatt: lineært avhengig

$V \subseteq \mathbb{R}^n$: $a\bar{v} + b\bar{w} \in V$ når $\bar{v}, \bar{w} \in V$ $a, b \in \mathbb{R}$

lukket under lineære kombinasjoner

$\{\bar{0}\} \neq V \subseteq \mathbb{R}^n$: Lineært underrom

lukket

Største underrom: $\mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{R}^n$

Minste underrom: $\{\bar{0}\} \subseteq \mathbb{R}^n$

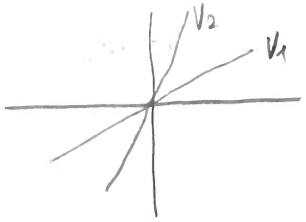
Underrom av $\mathbb{R}$: $\{0\}, \mathbb{R}$

Ingen mellom fordi: $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$

betyr at vilkårlig $y = \frac{y}{x} \cdot x + b \cdot 0$.

Underrom av $\mathbb{R}^2$: $\{\bar{0}\}, \mathbb{R}, \mathbb{R}^2$

↑ Mange slike



Underrom av $\mathbb{R}^3$: $\{\bar{0}\}, \mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$

↑ Alle linjer gjennom $\bar{0}$

↖ Alle plan som inneholder $\bar{0}$

Vi kan lage underrom: $M \subset \mathbb{R}^n$ vilkårlig mengde $\quad V = \text{Span}(M)$

$= \{\sum a_i v_i \mid a_i \in \mathbb{R}, v_i \in M\}$

alle lineærkombinasjoner av elementene i M

Eks $M = \left\{\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\right\}$ $\quad \text{Span}(M) = \left\{a\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}\right\}$

$= \left\{\begin{pmatrix}a+b\\a-b\\2a\end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}\right\}$

Setter $x = a+b \quad y = a-b \quad z = 2a$

$$\Rightarrow \quad x+y-z = (a+b)+(a-b)-2a = 0$$

$$V = \text{Span}(M) = \{(x,y,z) \mid x+y-z = 0\}$$

Dette er et plan i $\mathbb{R}^3$

$$x+y-z=0 \quad \longleftrightarrow \quad \bar{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Observere: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0.$

Generelt faktum:

V: Plan i $\mathbb{R}^3$: $ax+by+cz = 0$

$\Updownarrow$

(a,b,c)

$V = \text{Span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2)$ hvor $\bar{v}_1 \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \bar{v}_2 \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0$

og $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2\}$ er lineært uavhengig

Ulike mengder kan spenne samme lineære underrom

$$V_1 = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = V_2$$

fordi $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in V_2$ og $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in V_1$

f.eks. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Merk at $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ lineært uavhengig $\qquad \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ lineært avhengig

fordi $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Definisjon av basis for $V \subseteq \mathbb{R}^n$:

$\mathcal{B} = \{\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_m\}$ lineært uavhengig

$V = \text{Span}(\mathcal{B})$

Eksempler $\left\{\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}$ basis for $\mathbb{R}^2$

$\left\{\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}\right\}$ ikke basis for $\mathbb{R}^2$ (lineært avhengig)

$\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}\right\}$ ikke basis for $\mathbb{R}^3$ (utspenner ikke)

Standardbasis: $\mathcal{E}=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$ for $\mathbb{R}^2$

$\mathcal{E}=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ for $\mathbb{R}^3$

Eksempel: Er $\mathcal{B}=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}$ en basis for $\mathbb{R}^3$?

$$x\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-y+2z\\x+y-z\\x+z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Likningssystem:
$$\begin{aligned}x-y+2z&=0\\x+y-z&=0\\x+z&=0\end{aligned}\qquad\begin{pmatrix}1&-1&2\\1&1&-1\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Åpenbart: $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ er en løsning. Kan vi finne en ikke-triviell løsning?

Ja, hvis $\det\begin{pmatrix}1&-1&2\\1&1&-1\\1&0&1\end{pmatrix}=1+1+0-2+1-0=1\neq 0$

Antall elementer er viktig!

$\mathcal{B}\subseteq\mathbb{R}^n$ Antall elementer i $\mathcal{B}$ er m

Lineært uavhengig $\{\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_k\}$ $k>m$: Må være lineært avhengig

(Steinitz erstatningsresultat)

Konsekvens:

To basiser for $V \subseteq \mathbb{R}^n$ har like mange elementer.

Dette antallet kalles dimensjonen til V

$= \dim(V)$

Dette betyr: $\dim(\mathbb{R}^n) = n$!!!

Neste tema: Lineære avbildninger.

$V \subseteq \mathbb{R}^n$, $W \subseteq \mathbb{R}^m$ lineære underrom

$T: V \longrightarrow W$ lineær avbildning dersom

$$T(a\bar{v}_1 + b\bar{v}_2) = aT(\bar{v}_1) + bT(\bar{v}_2)$$

for alle $\bar{v}_1, \bar{v}_2 \in V$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Hvis $V = W$: T kalles en lineær operator

Fakta: 1) $T(\bar{0}) = \bar{0}$ fordi $T(0\cdot\bar{v}_1 + 0\cdot\bar{v}_2) = 0T(\bar{v}_1) + 0\cdot T(\bar{v}_2)$

$T(\bar{0}) = \bar{0}$

2) $T(-\bar{v}) = -T(\bar{v})$ fordi

$\bar{0} = T(\bar{0}) = T(\bar{v} + (-1)\bar{v}) = T(\bar{v}) + T(-\bar{v})$

Sammenheng med matriseregning

Vi kan alltid skrive $T(\bar{v}) = A \cdot \bar{v}$

for en matrise A.