Lineære avbildninger

Lineær avbildning:

$T: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ slik at $\forall \bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{R}^n$, $a, b \in \mathbb{R}$

Så er $T(a\bar{v} + b\bar{w}) = aT(\bar{v}) + bT(\bar{w})$

For $T: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ (samme): Lineær operatør

$$T(\bar{0}) = T(0 \cdot \bar{a}) = 0 \cdot T(\bar{a}) = \bar{0}$$

$$T(-\bar{v}) = T(\bar{0} + -1 \cdot \bar{v}) = \bar{0} + (-1)T(\bar{v})$$

dvs $T(-\bar{v}) = -T(\bar{v})$

Prototyp-eksempel:

$T(\bar{v}) = A \cdot \bar{v}$ for matrise A av rett størrelse

Lineær avbildning siden

$$A \cdot (a\bar{v} + b\bar{w}) = a \cdot A\bar{v} + b \cdot A\bar{w}$$

Gjelder også motsatt:

$$T(x, y) = (x+y, x-y, 2x)$$

Konstruere matrise

$$A = [T]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} = \left(T(1,0) \,\vdots\, T(0,1)\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Betyr matrise med $T(1,0)$ og $T(0,1)$ som søyler

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \\ 2x \end{pmatrix}$$

Generell konstruksjon: T svarer til matrise

$$[T] = \left(T(\bar{e}_1) \vdots T(\bar{e}_2) \vdots \cdots \vdots T(\bar{e}_n) \right)$$

Eksempel $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ gitt ved $T(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 - 2x_1 \end{pmatrix}$

$\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ standardbasis

$$[T]_{\mathcal{E}} = \left(T(1,0) \vdots T(0,1) \right)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matrisen til T, relativt til standardbasisen $\mathcal{E}$.

Noen begreper:

Søylerom: $\text{col}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

Rang til matrise A: $\text{rg}(A) = \dim(\text{col}(A))$

Nullrom: Alle $\bar{v}$ slik at $A\bar{v} = 0$

- danner underrom
- dimensjonen kalles NULLITET

$$N(T) = \left\{ \bar{v} \mid T(\bar{v}) = \bar{0} \right\}$$

Eksempel $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, x_1 - x_2 + 2x_3, 2x_1 + 3x_3)$

$N(T)$: løsninger av

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 \quad + 3x_3 = 0 \end{array}\right\} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{x_1}{3} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Eksempel $T(\bar{v}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \bar{v}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ -x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$N(T) = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Viktig resultat:

$$T: V \longrightarrow V \qquad T(\bar{v}) = A \cdot \bar{v}$$

$N(T) = 0 \iff A$ invertibel

$\Updownarrow$ $\Updownarrow$

Søylene i A er lineært uavhengig

Enda viktigere resultat: (Undervurder aldri et resultat som teller noenting)

$$T: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \qquad T(\bar{v}) = A\bar{v} \qquad \Rightarrow \quad \underline{\text{rg}\,T + \dim N(T) = n}$$

Eksempel 1) $T(\bar{v}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\bar{v} = A\bar{v}$

$\dim N(T) = 1 \qquad \dim \text{col}(A) = 1$

2) $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $\quad T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ $\quad N(T) = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$

$\underline{\dim N(T) = 1}.$

$\dim(\text{col}(A)) = 2$ siden $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{3}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

og $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ er lineært uavhengig

$2 + 1 = 3$

A
$n \times n$-matrise

A invertibel $\iff$ $\det(A) \neq 0$

$\det(A) \neq 0$ $\iff$ Søylene i A er lineært uavhengig

A invertibel $\iff$ $N(A) = \{0\}$

$N(A) = \{0\}$ $\iff$ $\text{rg}\, A = n$

Stive bevegelser = isometrier

Definisjon: $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$
lineær operator
Som oppfyller: $\|T(\bar{v})\| = \|\bar{v}\| \quad \forall \bar{v} \in \mathbb{R}^n$
bevarer lengder av vektorer

Kalles en isometri.

T isometri

$T(\bar{u}+\bar{v}) = T(\bar{u}) + T(\bar{v})$

$\|T(\bar{u}+\bar{v})\| = \sqrt{(T(\bar{u})+T(\bar{v}))\cdot(T(\bar{u})+T(\bar{v}))}$

$= \sqrt{T(\bar{u})\cdot T(\bar{u}) + 2T(\bar{u})T(\bar{v}) + T(\bar{v})\cdot T(\bar{v})}$

$= \sqrt{\|T(\bar{u})\|^2 + 2T(\bar{u})T(\bar{v}) + \|T(\bar{v})\|^2}$

$= \sqrt{\|\bar{u}\|^2 + 2T(\bar{u})T(\bar{v}) + \|\bar{v}\|^2}$

$\|\bar{u}+\bar{v}\| = \sqrt{\|\bar{u}\|^2 + 2\,\bar{u}\cdot\bar{v} + \|\bar{v}\|^2}$

$\Rightarrow \boxed{T(\bar{u})\cdot T(\bar{v}) = \bar{u}\cdot\bar{v}}$

For $T(\bar{v}) = A\cdot\bar{v}$ får vi

$(A\cdot\bar{v})^T A\bar{v} = \bar{v}^T A^T A\bar{v} = \bar{v}^T\cdot\bar{v}$

$\Rightarrow A^T A = I$ dvs ortogonal matrise